Suites et Séries de Fonctions

I) Modes de Convergences d'une Suite de Fonctions

Définition 1 : (Convergence simple)
Soit X un ensemble non vide. Soit E un evn de dimension finie.
f et les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans E.
On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur X si et seulement si

$$\forall x \in X, \ \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

Vocabulaire : f est dite la *limite simple* de la suite $(f_n)_n$ sur X.

Définition 2 : (Convergence uniforme)
Soit X un ensemble non vide. Soit E un evn de dimension finie.
f et les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans E.
On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformement vers f sur X si et seulement si

$$\forall \varepsilon \succ 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \succeq N, \ \forall x \in X, \ |f_n(x) - f(x)| \preceq \varepsilon$$

Vocabulaire : f est dite la *limite uniforme* de la suite $(f_n)_n$ sur X.

Proposition 3 :
Si $(f_n)_n$ *converge uniformement* vers f sur X
alors $(f_n)_n$ *converge simplement* vers f sur X.

Attention ! : La réciproque est en général fausse.

Proposition 4 :
Supposons que f et les $(f_n)_n$ sont bornées sur X. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $(f_n)_n$ *converge uniformement vers* f *sur* X
2) $\lim\limits_{n \to +\infty} \| f_n - f \|_\infty = 0$
3) $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$ pour la norme $\|.\|_\infty$

Proposition 5 :
S'il existe une suite positive $(\alpha_n)_n$ telle que

$$\begin{cases} \textbf{1)} \ \lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 0 \\ \textbf{2)} \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in X, \ \| f_n(x) - f(x) \| \preceq \alpha_n \end{cases}$$

alors $(f_n)_n$ *converge uniformement* vers f sur X.

II) Modes de Convergences d'une Série de Fonctions

1) Convergence Simple et Convergence Absolue

Définition 1 : (Convergence simple)
Soit X un ensemble non vide. Soit E un evn de dimension finie.
f et les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans E.
La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement sur X si et seulement si la suite de fonction $(S_n)_n$ converge simplement sur X.
où $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.

Proposition 2 :
La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement sur X si et seulement si pour tout $x \in X$, la série $\sum_n f_n(x)$ converge.

Vocabulaire : Dans ce cas, la limite simple de la série de fonctions $\sum_n f_n(x)$ est la fonction $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ notée $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Proposition 3 :
Supposons que la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement sur X, et notons S sa fonction somme.
On rappelle que $(\forall x \in X,\ S(x) = S_n(x) + R_n(x))$; où

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \ et\ R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$$

La suite de fonctions $(R_n)_n$ converge simplement vers 0.

Définition 4 : (Convergence absolue)
La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge absolument sur X si et seulement si pour tout $x \in X$, la série $\sum_n \| f_n(x) \|$ converge .

Proposition 5 :
Si la série de fonctions $\sum_n f_n$ *converge absolument* sur X
alors elle *converge simplement* sur X.

2) Convergence Uniforme

Définition 1 : (Convergence uniforme)
Soit X un ensemble non vide. Soit E un evn de dimension finie.
f et les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans E.
La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément sur X si et seulement si la suite de fonction $(S_n)_n$ converge uniformément sur X.
où $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.

Proposition 2 :

$$\sum_n f_n \text{ converge uniformément sur X} \Leftrightarrow \begin{cases} \textbf{1)}\ \sum_n f_n \ converge\ simplement\ sur\ X \\ \textbf{2)}\ (R_n)_n\ converge\ uniformement\ vers\ 0\ sur\ X \end{cases}$$

3) Convergence Normale

Définition 1 : (Convergence normale)
Soit X un ensemble non vide. Soit E un evn de dimension finie.
Les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans E.
La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge normalement sur X si et seulement si :

$$\begin{cases} \textbf{1)}\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n\ est\ bornee\ sur\ X. \\ \textbf{2)}\ La\ serie\ positive\ \sum_n \| f_n \|_\infty\ \ converge \end{cases}$$

Proposition 2 :
Soit X un ensemble non vide. Soit E un evn de dimension finie.
Les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans E.
S' il existe une suite $(\alpha_n)_n$ telle que

$$\begin{pmatrix} \textbf{1)}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in\ X,\ \|f_n(x)\| \leq \alpha_n \\ \textbf{2)}\ \sum_n \alpha_n\ converge \end{pmatrix}$$

Alors La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge normalement sur X.

Proposition 3 :

1) $\left(\sum_n f_n\ converge\ \textbf{normalement}\ sur\ X\right) \Rightarrow \left(\sum_n f_n\ converge\ \textbf{uniformement}\ sur\ X\right)$

2) $\left(\sum_n f_n\ converge\ \textbf{normalement}\ sur\ X\right) \Rightarrow \left(\sum_n f_n\ converge\ \textbf{absolument}\ sur\ X\right)$

III) Stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite

1) Intervertion de limites

Théorème 1 : (intervertion des limites)
E et F deux evn de dimensions finies. X une partie de E.
f et les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans F.
Soit $a \in \overline{X}$.

Si $\begin{cases} 1)\ \forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x \to a} f_n(x) = l_n \in F \\ 2)\ (f_n)\ CU\ vers\ f\ sur\ X \end{cases}$

Alors $\begin{cases} 1)\ La\ suite\ (l_n)\ converge \\ 2)\ \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\lim\limits_{x \to a} f_n(x) \right) = \lim\limits_{x \to a} \left(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \right) \end{cases}$

Théorème 2 : (Intervertion d'une limite et d'une somme)
E et F deux evn de dimensions finies. X une partie de E.
f et les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans F.
Soit $a \in \overline{X}$.

Si $\begin{cases} 1)\ \forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x \to a} f_n(x) = l_n \in F \\ 2)\ \sum\limits_{n} f_n\ CU\ sur\ X \end{cases}$

Alors $\begin{cases} 1)\ La\ serie\ \sum l_n\ converge \\ 2)\ \lim\limits_{x \to a} \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x \to a} f_n(x) \right) \end{cases}$

Théorème 3 : (intervertion des limites) (*Adaptation au cas de* $a = \pm\infty$)
E=$\mathbb{R}$ et F un evn de dimension finie. X un intervalle de $\mathbb{R}$.
f et les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans F.

Si $\begin{cases} 1)\ \forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = l_n \in F \\ 2)\ (f_n)\ CU\ vers\ f\ sur\ X \end{cases}$

Alors $\begin{cases} 1)\ La\ suite\ (l_n)\ converge \\ 2)\ \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_n(x) \right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \right) \end{cases}$

Théorème 4 : (Intervertion d'une limite et d'une somme)(*Adaptation au cas de $a=\pm\infty$*)
E=$\mathbb{R}$ et F un evn de dimension finie. X un intervalle de $\mathbb{R}$.
f et les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans F.

A) Supposons que X est un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$.

Si $\begin{cases} 1)\ \forall n\in\mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=l_n\in F \\ 2)\ \sum\limits_n f_n\ CU\ sur\ X \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

B) Supposons que X est un intervalle non minoré de $\mathbb{R}$.

Si $\begin{cases} 1)\ \forall n\in\mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)=l_n\in F \\ 2)\ \sum\limits_n f_n\ CU\ sur\ X \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$

Exercice d'application 1 :

Considérons la fonction $S : t\longmapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+t^2}$.

1) Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2) Claculer $\lim\limits_{t\to+\infty} S(t)$.

Exercice d'application 2 : (CNC 2017 MP)
Pour tout $x\succ 0$, on pose

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n(1+2nx)}$$

On donne $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

1) Montrer que pour tout $x\succ 0$, $\varphi(x)$ est bien défini.
2) Justifier l'existence de la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\varphi(x)$ et déterminer sa valeur.

2) Continuité

Théorème 1 :

E et F deux evn de dimensions finies. X une partie de E. Soit $a \in X$.
f et les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans F.

A) Si $\begin{pmatrix} 1)\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ est continue en } a \\ 2)\ (f_n) \text{ CU vers } f \text{ sur } X \end{pmatrix}$ **Alors** (f est continue en a)

B) Si $\begin{pmatrix} 1)\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ est continue sur } X \\ 2)\ (f_n) \text{ CU vers } f \text{ sur } X \end{pmatrix}$ **Alors** (f est continue sur X)

Théorème 2 :

E et F deux evn de dimensions finies. X une partie de E.
f et les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans F.

Si $\begin{pmatrix} 1)\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ est continue sur } X \\ 2)\ \sum\limits_n f_n \text{ CU sur } X \end{pmatrix}$ **Alors** (S est continue sur X)

avec $S : x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ sa somme.

.

Exercice d'application :

Considérons la fonction $f : t \longmapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos(nt)}{n^2}$.

1) Préciser D_f ; le domaine de définition de f.
2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

NB : Des fois la convergence uniforme est délicate à établir sur X ; on utilse alors le résultat suivant :

Corollaire 3 :

E et F deux evn de dimensions finies. X une partie de E.
f et les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans F.

Si $\begin{pmatrix} 1)\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ est continue sur } X \\ 2)\ \sum\limits_n f_n \text{ CU sur tout compact de } X \end{pmatrix}$ **Alors** (S est continue sur X)

NB : Si on est dans $E = \mathbb{R}$, on montre la convergence uniforme sur tout segment $[a, b]$ de X.

Exercice d'application :

Considérons la fonction $S : t \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+t}\right)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.
Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^+$.

3) Intégration terme à terme

Théorème 1 : (Intervertion de limite et intégrale))
$[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et F un evn de dimension finie.
f et les fonctions f_n sont définies sur $[a, b]$ à valeurs dans F.

Si $\begin{pmatrix} 1)\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \textit{ est continue sur } [a,b] \\ 2)\ (f_n) \textit{ CU vers } f \textit{ sur } [a,b] \end{pmatrix}$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)dt\right) = \int_a^b \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\right) dt$

Corollaire 2 : (Intervertion de $\sum$ et $\int$))
$[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et F un evn de dimension finie.
f et les fonctions f_n sont définies sur $[a, b]$ à valeurs dans F.

Si $\begin{pmatrix} 1)\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \textit{ est continue sur } [a,b] \\ 2)\ \sum\limits_n f_n \textit{ CU sur } [a,b] \end{pmatrix}$ **Alors** $\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)dt\right)$

Exercice d'application :

Pour $n \succeq 1$, on note $c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.
On rappelle que $(c_n)_n$ converge vers la fameuse constante d'Euler η.
Considéron la fonction $S : t \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+t}\right)$

Montrer que :

1) S est définie et continue sur $[0, 1]$.
2) $\int_0^1 S(t)dt = \eta$

4) Dérivation

Théorème 1 :
I un intervalle de $\mathbb{R}$ et F un evn de dimension finie.
f et les fonctions f_n sont définies sur I à valeurs dans F.

$$\textbf{Si}\begin{pmatrix} 1)\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \ est\ de\ classe\ C^1\ sur\ I \\ 2)\ (f_n)\ CS\ vers\ f\ sur\ I \\ 3)\ (f_n')\ CU\ vers\ h\ sur\ tout\ segment\ [a,b]\ de\ I \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Alors}\begin{pmatrix} 1)\ f\ est\ de\ classe\ C^1\ sur\ I \\ 2)\ \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)' = \lim\limits_{n\to+\infty}(f_n')\ cad\ f' = h \\ 3)\ (f_n)\ CU\ sur\ tout\ segment\ [a,b]\ de\ I \end{pmatrix}$$

.

Corollaire 2 : (Dérivation terme à terme)
I un intervalle de $\mathbb{R}$ et F un evn de dimension finie.
f et les fonctions f_n sont définies sur I à valeurs dans F.

$$\textbf{Si}\begin{pmatrix} 1)\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \ est\ de\ classe\ C^1\ sur\ I \\ 2)\ \sum\limits_n f_n\ CS\ sur\ I \\ 3)\ \sum\limits_n f_n'\ CU\ sur\ tout\ segment\ [a,b]\ de\ I \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Alors}\begin{pmatrix} 1)\ S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\ est\ de\ classe\ C^1\ sur\ I \\ 2)\ \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n' \\ 3)\ \sum\limits_n f_n\ CU\ sur\ tout\ segment\ [a,b]\ de\ I \end{pmatrix}$$

Exercice d'application 1 :

Pour tout $t \in]0,+\infty[$, on note $S(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+t}$.

1) Montrer que S est définie et de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

2) Que dire alors de sa monotonie ?

Exercice d'application 2 : (Fonction zéta de Riemann)

Pour tout $t \in]1,+\infty[$, on note $\zeta(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^t}$.

1) Montrer que ζ est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$.

2) Que dire de sa monotonie ?

Corollaire 3 : (Classe C^k)
I un intervalle de $\mathbb{R}$ et F un evn de dimension finie.
f et les fonctions f_n sont définies sur I à valeurs dans F. Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$\textbf{Si} \begin{pmatrix} 1)\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ f_n \ \textit{est de classe}\ C^k\ \textit{sur}\ I \\ 2)\ \forall\ 0 \preceq p \preceq k-1,\ \sum\limits_n f_n^{(p)}\ CS\ \textit{sur}\ I \\ 3)\ \sum\limits_n f_n^{(k)}\ CU\ \textit{sur tout segment}\ [a,b]\ \textit{de}\ I \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Alors} \begin{pmatrix} 1)\ S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\ \textit{est de classe}\ C^k\ \textit{sur}\ I \\ 2)\ \forall\ 1 \preceq p \preceq k,\ S^{(p)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)} \end{pmatrix}$$

.

Exercice d'application : (Fonction zéta de Riemann)

Pour tout $t \in]1, +\infty[$, on note $\zeta(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^t}$.

1) Montrer que ζ est de classe C^2 sur $]1, +\infty[$.

2) Que dire de sa concavité ?

Corollaire 3 : (Classe C^∞)
I un intervalle de $\mathbb{R}$ et F un evn de dimension finie.
f et les fonctions f_n sont définies sur I à valeurs dans F.

$$\textbf{Si} \begin{pmatrix} 1)\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ f_n \ \textit{est de classe}\ C^\infty\ \textit{sur}\ I \\ 2)\ \sum\limits_n f_n\ CS\ \textit{sur}\ I \\ 3)\ \forall p \succeq 1,\ \sum\limits_n f_n^{(p)}\ CU\ \textit{sur tout segment}\ [a,b]\ \textit{de}\ I \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Alors} \begin{pmatrix} 1)\ S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\ \textit{est de classe}\ C^\infty\ \textit{sur}\ I \\ 2)\ \forall p \succeq 1,\ S^{(p)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)} \end{pmatrix}$$

.

Exercice d'application : (Fonction zéta de Riemann)

Pour tout $t \in]1, +\infty[$, on note $\zeta(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^t}$.

Montrer que ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.

IV) Approximation Uniforme

Théorème 1 :
Soient F un evn de dimension finie et $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$.
Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans F est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers.

.

Théorème 2 : (Théorème d'approximation de Weierstrass)
Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$.
Toute fonction , réelle ou complexe, continue sur $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

Autrement dit :
Il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \| P_n - f \|_\infty = 0$$

où $\| f \|_\infty = \sup\{ \ |f(x)| \ / \ x \in [a,b]\}$

NB :
Ceci traduit le fait que l'espace des fonctions polynomiales sur $[a,b]$ est dense dans l'evn $C([a,b],\mathbb{K})$ muni de la norme de la convergence uniforme.

.

Exercice d'application :
Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \int_0^1 t^n f(t)dt = 0$$

1) Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X], \ \displaystyle\int_0^1 P(t)f(t)dt = 0$

2) En déduire que $f = 0$

Solution des exercices d'applications

Exercice d'application 1 :

Considérons la fonction $S : t \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+t^2}$.

1) Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2) Claculer $\lim_{t \to +\infty} S(t)$.

Solution :

$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+t^2}$$

1) i) M que S est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Il s'agit de montrer que $S(t)$ existe.

On a :

$S(t)$ existe $\Longleftrightarrow$ La somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+t^2}$ existe

$\Longleftrightarrow$ La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+t^2}$ Converge

C'est une série à termes positifs

et que $\frac{1}{n^2+t^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

En plus la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ Converge (série de Riemann ; $\alpha = 2 > 1$)

Alors la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+t^2}$ Converge.

Enfin $S(t)$ existe $\square$

ii) Mq que S est Continue sur $\mathbb{R}$.

Outil

E et F deux evn de dimensions finies. X une partie de E.
f et les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans F.

Si $\left(\begin{array}{l} 1)\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \textit{ est continue sur } X \\ 2)\ \sum_n f_n \textit{ CU sur } X \end{array}\right)$ **Alors** (S est continue sur X)

avec $S : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ sa somme.

On a : $\left(\forall t \in \mathbb{R},\ S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+t^2} \right)$

Notons $f_n(t) = \frac{1}{n^2+t^2}$ pour tout $n \geqslant 1$ et $t \in \mathbb{R}$.

Pour montrer que S est Continue sur $\mathbb{R}$, il suffit de vérifier les deux points suivants :

a) $\forall n \geqslant 1$, f_n est Continue sur $\mathbb{R}$.

b) La série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ Converge Uniformement sur $\mathbb{R}$.

Pour a) Soit $n \geqslant 1$.

$f_n : t \mapsto \frac{1}{n^2+t^2}$ est Continue sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions Continues.

Pour b)

Il suffit qu'on montre que la série $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ Converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Soient alors $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$|f_n(t)| = \frac{1}{n^2+t^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

S' il existe une suite $(\alpha_n)_n$ telle que

$$\left(\begin{array}{l} \textbf{1)}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X,\ \|f_n(x)\| \leq \alpha_n \\ \textbf{2)}\ \sum_n \alpha_n \textit{ converge} \end{array}\right)$$

Alors La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge normalement sur X.

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ Converge (Riemann)

d'où la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ Converge normalement sur $\mathbb{R}$. $\square$

2) Calculons $\lim_{t \to +\infty} S(t)$:

$$\lim_{t\to+\infty} S(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\right)$$

On visera à permuter les deux symboles lim et $\sum$:

Outil

$\boxed{\textbf{Théorème 4 :}}$ (Intervertion d'une limite et d'une somme)(*Adaptation au cas de $a = \pm\infty$*)
E=$\mathbb{R}$ et F un evn de dimension finie. X un intervalle de $\mathbb{R}$.
f et les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans F.
A) Supposons que X est un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$.

Si $\begin{cases} 1)\ \forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = l_n \in F \\ 2)\ \sum_n f_n\ CU\ sur\ X \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

Pour pouvoir permuter, on vérifiera les points suivants :

$$f_n(t) = \frac{1}{n^2+t^2}$$

$$\begin{cases} a)\ \forall n \geq 1,\ \lim\limits_{t\to+\infty} f_n(t) = l_n \in \mathbb{R} \\ b)\ \text{La série de fonctions } \sum_{n\geq 1} f_n \text{ CU sur } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Pour a) :

Soit $n \geqslant 1$. On a $\lim\limits_{t \to +\infty} f_n(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{n^2+t^2} = 0 \in \mathbb{R}$.

Pour b) :

Montrée dans la question 1°).

Ainsi on a :

$$\lim_{t \to +\infty} S(t) = \lim_{t \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\underbrace{\lim_{t \to +\infty} f_n(t)}_{=0} \right)$$

$$= 0$$

$\square$

Exercice d'application 2 : (CNC 2017 MP)
Pour tout $x \succ 0$, on pose

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+2nx)}$$

On donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

1) Montrer que pour tout $x \succ 0$, $\varphi(x)$ est bien défini.
2) Justifier l'existence de la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\varphi(x)$ et déterminer sa valeur.

$$\boxed{\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+2nx)}}$$

Solution :

1) Soit $x > 0$. M.q. $\varphi(x)$ est défini.

On a $\varphi(x)$ est défini $\iff$ La somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+2nx)}$ existe

$\iff$ La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x}{n(1+2nx)}$ converge.

Et on a $\displaystyle\frac{x}{n(1+2nx)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{2n^2 \cdot x} \sim \frac{1}{2n^2}$

et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann : $\alpha = 2 > 1$)

D'où la série positive $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x}{n(1+2nx)}$ converge.

Enfin $\varphi(x)$ est défini. $\square$

2) Justifier l'existence de la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\varphi(x)$ et déterminer sa valeur.

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+2nx)} \right)$$; Justifions son existence et déterminons sa valeur.

Outil

Théorème 4 : (Intervertion d'une limite et d'une somme)(*Adaptation au cas de $a = \pm\infty$*)
E=$\mathbb{R}$ et F un evn de dimension finie. X un intervalle de $\mathbb{R}$.
f et les fonctions f_n sont définies sur X à valeurs dans F.
A) Supposons que X est un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$.

Si $\begin{cases} 1)\ \forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = l_n \in F \\ 2)\ \sum\limits_n f_n\ CU\ sur\ X \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

Vérifions les deux points suivants :

$$\begin{cases} a)\ \forall n \geq 1,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = l_n \in \mathbb{R} \\ b)\ \text{La série de fonctions } \sum\limits_{n\geq 1} f_n \text{ CU sur }]0,+\infty[. \end{cases}$$

où $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+2nx)}$

Pour a)

Soit $n \geq 1$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{n(1+2nx)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{n.2nx} = \dfrac{1}{2n^2} \in \mathbb{R}$ □

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+2nx)}$$

Pour b)

M.que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ CU sur $]0,+\infty[$:

Montrons la convergence normale sur $]0,+\infty[$:

S' il existe une suite $(\alpha_n)_n$ telle que

$$\begin{pmatrix} \textbf{1)}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X,\ \|f_n(x)\| \leq \alpha_n \\ \textbf{2)}\ \sum_n \alpha_n \textit{ converge} \end{pmatrix}$$

Alors La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge normalement sur X.

Soient alors $n \geq 1$ et $x \in]0,+\infty[$. On a :

$$|f_n(x)| = \frac{x}{n(1+2nx)}$$

$$\leq \frac{x}{n \cdot 2nx}$$

(on veut se débarasser de x
$1+2nx \geq 2nx$)

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2n^2}$$

Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n^2}$ converge (Riemann : $\alpha = 2 > 1$)

Alors la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ CN sur $]0,+\infty[$ $\square$

Enfin :

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+2nx)} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{n(1+2nx)} \right)}_{=\frac{1}{2n^2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

On a

Exercice d'application :

Considérons la fonction $f : t \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2}$.

1) Préciser D_f ; le domaine de définition de f.

2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution :

On a $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2}$

1) $D_f = ?$

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a :

$t \in D_f \iff f(t)$ existe

$\iff$ La somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2}$ existe

$\iff$ La série $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nt)}{n^2}$ converge

Ce qui est vérifié, car la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nt)}{n^2}$ converge absolument :

On a : $\left(\forall n \geq 1, \left|\frac{\cos(nt)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge

D'où $\sum_{n\geq 1} \left|\frac{\cos nt}{n^2}\right|$ converge.

Enfin $D_f = \mathbb{R}$ $\square$

2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

On a : $\left(\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\right)$ où $f_n(t) = \frac{\cos(nt)}{n^2}$

a) $\forall n \geqslant 1,\ f_n : t \longmapsto \frac{\cos(nt)}{n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

b) La série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge unif sur $\mathbb{R}$.

En effet :

On montrera qu'elle converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Soient alors $n \geqslant 1$ et $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$|f_n(t)| = \frac{|\cos(nt)|}{n^2}$$

$$\leq \frac{1}{n^2}$$

Et $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

D'où la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Enfin, de a) et b) on tire que f est continue sur $\mathbb{R}$. $\square$

Exercice d'application :

Considérons la fonction $S : t \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+t}\right)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Solution :

$$\boxed{S(t)=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\ ;\ \text{où } f_n(t)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+t}}$$

M que S est continue sur $\mathbb{R}^+$

Pour montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^+$, on vérifie les deux points suivants :

$$\begin{cases} a)\ \forall n \geq 1\ f_n \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+ \\ b) \text{ La série de fonctions CU sur tout segment } [a,b] \text{ de } \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Pour a)

Soit $n \geq 1$, $f_n : t \mapsto \frac{1}{n}-\frac{1}{n+t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ par opérations sur les fonctions continues.

Pour b)

Pour montrer que la série de fonctions CU sur $\mathbb{R}^+$, on montrera qu'elle converge normalement sur $\mathbb{R}^+$.

S' il existe une suite $(\alpha_n)_n$ telle que

$$\begin{pmatrix} \textbf{1)}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X,\ \|f_n(x)\| \leq \alpha_n \\ \textbf{2)}\ \sum_n \alpha_n \textit{ converge} \end{pmatrix}$$

Alors La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge normalement sur X.

Soient alors $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}^+$.

On a :

$$|f_n(t)| = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+t}$$

$$= \frac{t}{n(n+t)} \qquad \text{(On doit se débarasser de } t\text{)}$$

$$\leq \frac{b}{n^2} \qquad \left(\begin{array}{l} t \in [a,b] \subset \mathbb{R}^+ \\ n+t \geq n \end{array}\right)$$

Or $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{b}{n^2}$ converge (Riemann : $\alpha = 2 > 1$)

D'où la série de fonctions CN sur $[a,b]$. $\square$

Enfin, S est continue sur $\mathbb{R}^+$. $\square$

Exercice d'application :

Pour $n \succeq 1$, on note $c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

On rappelle que $(c_n)_n$ converge vers la fameuse constante d'Euler η.

Considéron la fonction $S : t \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+t}\right)$

Montrer que :

1) S est définie et continue sur $[0,1]$.

2) $\int_0^1 S(t)dt = \eta$

Solution :

$$\boxed{S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \text{ ; où } f_n(t) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+t}}$$

1) i) M que S est définie sur $[0,1]$.

Soit $t \in [0,1]$. M. que $S(t)$ existe.

On a :

$S(t)$ existe $\iff$ La somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+t}\right)$ existe

$\iff$ La série $\sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+t}\right)$ Converge

$\iff$ La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{t}{n(n+t)}$ Converge

On a $\frac{t}{n(n+t)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{t}{n^2}$

Or $\sum_{n \geqslant 1} \frac{t}{n^2}$ Converge (Riemann ; $\alpha = 2 > 1$)

Alors la série positive $\sum_{n\geq 1} \frac{t}{n(n+t)}$ converge.

D'où $S(t)$ existe $\square$

1) ii) Mq que S est continue sur $[0,1]$.

On a : $\boxed{S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \; ; \text{ où } f_n(t) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+t}}$

Pour montrer que S est continue sur $[0,1]$, on vérifie les deux points suivants :

$$\begin{cases} \text{a) } \forall n \geq 1, \; f_n \text{ est continue sur } [0,1] \\ \text{b) La série de fonctions CU sur } [0,1] \end{cases}$$

Pour a)

Soit $n \geq 1$, $f_n : t \mapsto \frac{1}{n} - \frac{1}{n+t}$ est continue sur $[0,1]$ par opérations sur les fonctions continues.

Pour b)

Pour montrer que la série de fonctions CU sur $[0,1]$, on montrera qu'elle converge normalement sur $[0,1]$.

S' il existe une suite $(\alpha_n)_n$ telle que

$$\begin{pmatrix} \textbf{1)} \; \forall n \in \mathbb{N}, \; \forall x \in X, \; \|f_n(x)\| \leq \alpha_n \\ \textbf{2)} \; \sum_n \alpha_n \textit{ converge} \end{pmatrix}$$

Alors La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge normalement sur X.

Soient alors $n \geq 1$ et $t \in [0,1]$.

On a :

$$|f_n(t)| = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+t}$$

$$|f_n(t)| = \frac{t}{n(n+t)}$$ (On doit se débarrasser de t)

$$\leqslant \frac{1}{n^2}$$ $\left(\begin{array}{l} t \leqslant 1 \text{ car } t \in [0,1] \\ n+t \geqslant n \end{array}\right)$

Or $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann : $\alpha = 2 > 1$)

D'où la série de fonctions CN sur $[0,1]$.

Enfin, S est continue sur $[0,1]$.

2) Montrons que $\int_0^1 S(t)\,dt = \gamma$

$$\int_0^1 S(t)\,dt = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+t} \right) \right) dt$$

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

On souhaite intervertir $\int$ avec $\sum$.

Outil

Si $\left(\begin{array}{l} 1)\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \textit{ est continue sur } [a,b] \\ 2)\ \sum\limits_n f_n \textit{ CU sur } [a,b] \end{array} \right)$ **Alors** $\displaystyle\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)\,dt \right)$

On montre alors les deux points suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} a)\ \forall n \geqslant 1,\ f_n : t \mapsto \frac{1}{n} - \frac{1}{n+t} \text{ est continue sur } [0,1] \\ b) \text{ La série de fonctions } \sum\limits_{n \geqslant 1} f_n \text{ CU sur } [0,1] \end{array} \right.$$

Ce qui est déjà montré au $\boxed{1)\ ii}$.

Ainsi :

$$\int_0^1 S(t)\,dt = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+t} \right) \right) dt$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+t} \right) dt \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^1 \frac{1}{n}\,dt - \int_0^1 \frac{1}{n+t}\,dt \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - [\ln(n+1) - \ln n] \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - (\ln(k+1) - \ln k) \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) \right)$$

$$\boxed{c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right) \quad \text{(somme télescopique)}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n}_{\to = c_n} + \underbrace{\ln n - \ln(n+1)}_{\to \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0} \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} C_n$$

$$= \gamma$$

$\square$

Exercice d'application 1 :

Pour tout $t \in]0,+\infty[$, on note $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+t}$.

1) Montrer que S est définie et de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

2) Que dire alors de sa monotonie ?

Solution :

$$\boxed{S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \; ; \text{ où } f_n(t) = \frac{(-1)^n}{n+t}}$$

1) i) M que S est définie sur $]0,+\infty[$.

Soit $t \in]0,+\infty[$. M. que $S(t)$ existe.

On a :

$S(t)$ existe $\iff$ La somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+t}$ existe

$\iff$ La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+t}$ Converge

Ce qui est vrai car c'est une série alternée et que la suite $\left(\frac{1}{n+t}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante de limite nulle.

D'où $S(t)$ existe. $\square$

1) ii) Mq que S est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

$$S(t)=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\ ;\ \text{où } f_n(t)=\frac{(-1)^n}{n+t}$$

Outil

Si $\left(\begin{array}{l} 1)\ \forall n\in\mathbb{N},\ f_n \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \\ 2)\ \sum_n f_n\ CS \text{ sur } I \\ 3)\ \sum_n f_n'\ \underline{CU} \text{ sur tout segment } \underline{[a,b] \text{ de } I} \end{array}\right)$

Alors $\left|\begin{array}{l} 1)\ S=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \\ 2)\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)'=\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'=S'} \end{array}\right|$

Pour montrer que S est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, il suffit de vérifier les points suivants :

a) $\forall n\geq 1$, f_n est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$

b) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ CS sur $]0,+\infty[$.

c) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n'$ CU sur tout $[a,b]\subset]0,+\infty[$

Pour a)

$\forall n \geq 1$, f_n est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, par operations sur les fonctions de classes C^1.

Pour b)

La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ CS sur $]0,+\infty[$?

Ça veut dire que $\left(\forall t \in]0,+\infty[\text{, la série numérique } \sum_{n\geq 1} f_n(t) \text{ converge}\right)$

Ce qu'on avait montré en 1)i).

Pour c)

La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n'$ CU sur tout $[a,b] \subset]0,+\infty[$?

Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$.

Montrons que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n'$ CU sur $[a,b]$.

Il suffit de montrer la convergence normale sur $[a,b]$.

Soient alors $n \geq 1$ et $t \in [a,b]$.

S' il existe une suite $(\alpha_n)_n$ telle que

$$\left(\begin{array}{l} \textbf{1)}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X,\ \|f_n(x)\| \leq \alpha_n \\ \textbf{2)}\ \sum_n \alpha_n \textit{ converge} \end{array}\right)$$

Alors La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge normalement sur X.

Rappel

$$|f_n'(t)| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+t)^2}\right|$$

$$= \frac{1}{(n+t)^2}$$

$$\leq \frac{1}{n^2} \quad \left(\text{car } (n+t)^2 \geq n^2 \ ; (t>0)\right)$$

Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ Converge (Riemann : $\alpha = 2 > 1$)

Alors la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n'$ Converge normalement sur $[a,b]$. $\square$

Enfin

$\longrightarrow$ S est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$

$\longrightarrow$ $\forall t \in]0,+\infty[, \; S'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+t)^2}$

2) Que dire alors de sa monotonie ?

S est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, et on a :

$$\forall t \in]0,+\infty[, \; S'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+t)^2}$$

Le signe de $S'(t)$ est celui du premier terme de la somme

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+t)^2}$, soit $\frac{(-1)^2}{(1+t)^2}$, puisque c'est une série alternée

et que la suite $\left(\frac{1}{(n+t)^2}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante de limite nulle.

D'où : $(\forall t \in]0,+\infty[, \; S'(t) \geq 0)$

et donc S est croissante sur $]0,+\infty[$.

Fin exercice

Rappel : (Critère special pour les séries alternées)

(Critère de Leibniz).

Soit $(\alpha_n)_{n\succeq n_0}$ une suite **décroissante** de **limite nulle**. On a :

1) La série alternée $\displaystyle\sum_{n\succeq n_0}(-1)^n\alpha_n$ converge.

2) $\forall n\succeq n_0,\ signe\,(R_n)=signe\,(du\ 1er\ terme\ dans\ R_n)$

3) $\forall n\succeq n_0,\ |R_n|\preceq|du\ 1er\ terme\ dans\ R_n|$

4) $signe\left(S=\displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty}(-1)^k\alpha_k\right)=signe\,(du\ 1er\ terme\ dans\ la\ somme\ S)$

où $R_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\alpha_k$

NB 1 : Ceci vaut aussi pour la série alternée $\displaystyle\sum_{n\succeq n_0}(-1)^{n-1}\alpha_n$.

Exercice d'application 2 : (Fonction zéta de Riemann)

Pour tout $t \in]1, +\infty[$, on note $\zeta(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^t}$.

1) Montrer que ζ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$.

2) Que dire de sa monotonie ?

Solution :

$$\boxed{\zeta(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \; ; \text{ où } f_n(t) = \frac{1}{n^t}}$$

1) M que ζ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$.

$$\boxed{\zeta(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \; ; \text{ où } f_n(t) = \frac{1}{n^t}}$$

Outil

Si
1) $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ *est de classe* C^1 *sur* I
2) $\sum_n f_n$ *CS sur* I
3) $\sum_n f_n'$ *CU sur tout segment* $[a, b]$ *de* I

Alors
1) $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est de classe* C^1 *sur* I
2) $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} f_n' = S'}$

Pour montrer que ζ est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$, il suffit de vérifier les points suivants :

a) $\forall n \geq 1$, f_n est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$

b) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ CS sur $]1,+\infty[$.

c) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n'$ CU sur tout $[a,b] \subset]1,+\infty[$

Pour a)

$\forall n \geq 1$, f_n est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$, par operations sur les fonctions de classes C^1. $\square$

Pour b)

La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ CS sur $]1,+\infty[$?

Ça veut dire que $\left(\forall t \in]1,+\infty[\text{, la série numérique } \sum_{n\geq 1} f_n(t) \text{ Converge}\right)$

Soit alors $t \in]1,+\infty[$. On a :

$$\sum_{n\geq 1} f_n(t) \text{ Converge} \iff \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^t} \text{ Converge}$$

Ce qui est vrai car $t > 1$ et que c'est une série de Riemann.

D'où la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ CS sur $]1,+\infty[$. $\square$

Pour c)

La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n'$ CU sur tout $[a,b] \subset]1,+\infty[$?

Soit $[a,b] \subset]1,+\infty[$.

Montrons que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n'$ CU sur $[a,b]$.

Il suffit de montrer la convergence normale sur $[a,b]$.

Soient alors $n \geq 1$ et $t \in [a,b]$.

S' il existe une suite $(\alpha_n)_n$ telle que

$$\begin{pmatrix} \textbf{1)}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X,\ |f_n(x)| \leq \alpha_n \\ \textbf{2)}\ \sum_n \alpha_n \textit{ converge} \end{pmatrix}$$

Alors La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge normalement sur X.

Rappel

$$|f_n'(t)| = \left|\frac{-\ln n}{n^t}\right|$$

$$= \frac{\ln n}{n^t}$$

$$= \ln n \cdot e^{-\ln n \cdot t}$$

$a \leq t \leq b$

$-\ln n . t \leq -\ln n . a$

$$\leq \ln n \cdot e^{-\ln n \cdot a}$$

$$\leq \frac{\ln n}{n^a}$$

$f_n'(t) = \left(\frac{1}{n^t}\right)' = (n^{-t})' = \left(e^{-\ln n . t}\right)'$

$= (-\ln n)\, e^{-\ln n . t} = \frac{-\ln n}{n^t}$

$u_n = o(v_n)$

Justifions que $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^a}$ converge (On pense à Bertrand Attention ! Hors programme)

Soit $1 < c < a$.

On a $n^c \cdot \frac{\ln n}{n^a} = \frac{\ln n}{n^{a-c}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (car $a-c>0$ et par Croissance Comparée)

$$\Rightarrow \frac{\frac{\ln n}{n^a}}{\frac{1}{n^c}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \frac{\ln n}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^c}\right)$$

Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^c}$ Converge $(c>1)$ alors $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^a}$ Converge. $\square$

Enfin ζ est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$, et on a :

$$\forall t \in]1,+\infty[, \ \zeta'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln n}{n^t}$$

□

2) Que dire de sa monotonie ?

ζ est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$, et on a :

$$\forall t \in]1,+\infty[, \ \zeta'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln n}{n^t} \leq 0$$

D'où ζ est décroissante sur $]1,+\infty[$.

□

Exercice d'application : (Fonction zéta de Riemann)

Pour tout $t \in]1, +\infty[$, on note $\zeta(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^t}$.

1) Montrer que ζ est de classe C^2 sur $]1, +\infty[$.

2) Que dire de sa concavité ?

Solution :

$$\boxed{\zeta(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \; ; \text{ où } f_n(t) = \frac{1}{n^t}}$$

1) M que ζ est de Classe C^2 sur $]1, +\infty[$.

Outil

$$\textbf{Si} \begin{pmatrix} 1)\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ f_n \textit{ est de classe } C^k \textit{ sur } I \\ 2)\ \forall\, 0 \preceq p \preceq k-1,\ \sum_n f_n^{(p)}\ CS \textit{ sur } I \\ 3)\ \sum_n f_n^{(k)}\ CU \textit{ sur tout segment } [a,b] \textit{ de } I \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Alors} \begin{pmatrix} 1)\ S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \textit{ est de classe } C^k \textit{ sur } I \\ 2)\ \forall\, 1 \preceq p \preceq k,\ S^{(p)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)} \end{pmatrix}$$

Pour montrer que ζ est de Classe C^2 sur $]1,+\infty[$, il suffit de vérifier les points suivants :

a) $\forall n \geq 1$, f_n est de Classe C^2 sur $]1,+\infty[$

b) $\forall 0 \leq p \leq 1$, $\sum_{n\geq 1} f_n^{(p)}$ CS sur $]1,+\infty[$.

c) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n''$ CU sur tout $[a,b] \subset]1,+\infty[$

Pour a)

$$f_n(t) = \frac{1}{n^t}$$

$\forall n \geq 1$, f_n est de Classe C^2 sur $]1,+\infty[$, par operations sur les fonctions de Classes C^2. $\square$

Pour b)

$$\left(\forall 0 \leq p \leq 1,\ \sum_{n\geq 1} f_n^{(p)} \text{ CS sur }]1,+\infty[\right) ?$$

Soit $0 \leq p \leq 1$. M. que $\sum_{n\geq 1} f_n^{(p)}$ CS sur $]1,+\infty[$.

Soit $t \in]1,+\infty[$.

Montrons que la série numérique $\sum_{n\geq 1} f_n^{(p)}(t)$ converge.

$$f_n^{(p)}(t) = \left(\frac{1}{n^t}\right)^{(p)} = \left(n^{-t}\right)^{(p)} = \left(e^{-\ln n \cdot t}\right)^{(p)} = (-\ln n)^p \cdot e^{-\ln n \cdot t} = \frac{(-\ln n)^p}{n^t}$$

On veut montrer que la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{(-\ln n)^p}{n^t}$ converge.

Càd $\sum_{n\geq 1} \frac{(\ln n)^p}{n^t}$ converge.

Soit $1 < c < t$. (On pense à la technique de Bertrand encore)

On a $\boxed{\frac{(\ln n)^p}{n^t} = o\left(\frac{1}{n^c}\right) \text{ par croissance comparée}}$

Or $\sum \frac{1}{n^c}$ converge (Riemann : $c > 1$)

D'où $\sum_{n\geq 1} \frac{(\ln n)^p}{n^t}$ converge. $\square$

Pour c)

La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n''$ CU sur tout $[a,b] \subset]1,+\infty[$?

Soit $[a,b] \subset]1,+\infty[$.

Montrons que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n''$ CU sur $[a,b]$.

Il suffit de montrer la convergence normale sur $[a,b]$.

Soient alors $n \geq 1$ et $t \in [a, b]$.

S' il existe une suite $(\alpha_n)_n$ telle que

$$\begin{pmatrix} \textbf{1)}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X,\ |f_n(x)| \leq \alpha_n \\ \textbf{2)}\ \sum_n \alpha_n \textit{ converge} \end{pmatrix}$$

Alors La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge normalement sur X.

Rappel

$$|f_n''(t)| = \left| \frac{(-\ln n)^2}{n^t} \right|$$

$$= \frac{(\ln n)^2}{n^t}$$

$$= \ln^2 n \cdot e^{-\ln n \cdot t}$$

$a \leq t \leq b$

$-\ln n . t \leq -\ln n . a$

$$\leq \ln^2 n \cdot e^{-\ln n . a}$$

$$\leq \frac{(\ln n)^2}{n^a}$$

Justifions que $\sum_{n \geq 1} \frac{(\ln n)^2}{n^a}$ converge (On pense à Bertrand)

Soit $1 < c < a$.

On a $\frac{(\ln n)^2}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^c}\right)$, par croissance comparée.

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^c}$ cv (Riemann ; $c > 1$)

D'où $\sum_{n \geq 1} \frac{(\ln n)^2}{n^a}$ converge $\square$

De a), b) et c) on tire que ζ est de classe C^2 sur $]1, +\infty[$, et qu'on a :

$$\boxed{\forall t \in]1, +\infty[, \ \zeta''(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n''(t)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^t}$$

$\square$

$\boxed{2)}$ Que dire de sa concavité ?

ζ est de classe C^2 sur $]1,+\infty[$ et :

$$\forall t \in]1,+\infty[, \ \zeta''(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^t} \geqslant 0$$

D'où ζ est convexe sur $]1,+\infty[$. $\square$

Exercice d'application : (Fonction zéta de Riemann)

Pour tout $t \in]1, +\infty[$, on note $\zeta(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^t}$.

Montrer que ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.

Solution :

$$\boxed{\zeta(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \; ; \text{ où } f_n(t) = \frac{1}{n^t}}$$

M que ζ est de Classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.

Outil

Si $\begin{pmatrix} 1)\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } I \\ 2)\ \sum_n f_n \text{ CS sur } I \\ 3)\ \forall p \succeq 1,\ \sum_n f_n^{(p)} \text{ CU sur tout segment } [a,b] \text{ de } I \end{pmatrix}$

Alors $\begin{pmatrix} 1)\ S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } I \\ 2)\ \forall p \succeq 1,\ S^{(p)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)} \end{pmatrix}$

Pour montrer que ζ est de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$, il suffit de vérifier les points suivants :

a) $\forall n \geq 1$, f_n est de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$

b) $\sum_{n\geq 1} f_n$ CS sur $]1,+\infty[$.

c) $\forall p \geq 1$, la sér de fonct $\sum_{n\geq 1} f_n^{(p)}$ CU sur tout $[a,b] \subset]1,+\infty[$

$f_n(t) = \dfrac{1}{n^t}$

Pour a)

$\forall n \geq 1$, f_n est de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$, par opérations sur les fonctions de classes C^∞. $\square$

Pour b)

D'après Riemann $(t > 1)$

Pour c)

$\forall p \geq 1$, la sér de fonct $\sum_{n\geq 1} f_n^{(p)}$ CU sur tout $[a,b] \subset]1,+\infty[$?

Soit $p \geq 1$.

Soit $[a,b] \subset]1,+\infty[$.

Montrons que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n^{(p)}$ CU sur $[a,b]$.

Il suffit de montrer la convergence normale sur $[a,b]$.

Soient alors $n \geqslant 1$ et $t \in [a,b]$.

> **S'** il existe une suite $(\alpha_n)_n$ telle que
>
> $$\begin{pmatrix} \textbf{1)}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X,\ |f_n(x)| \leq \alpha_n \\ \textbf{2)}\ \sum_n \alpha_n \textit{ converge} \end{pmatrix}$$
>
> **Alors** La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge normalement sur X.

Rappel

$$|f_n^{(p)}(t)| = \left| \frac{(-\ln n)^p}{n^t} \right|$$

$$= \frac{(\ln n)^p}{n^t}$$

$$= \ln^p n \cdot e^{-\ln n \cdot t}$$

$$\leqslant \ln^p n \cdot e^{-\ln n \cdot a}$$

$$\leqslant \frac{(\ln n)^p}{n^a}$$

$a \leqslant t \leqslant b$

$\Downarrow$

$-\ln n \cdot t \leqslant -\ln n \cdot a$

Justifions que $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(\ln n)^p}{n^a}$ converge (On pense à Bertrand)

Soit $1 < c < a$.

On a $\frac{(\ln n)^p}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^c}\right)$, par croissance comparée.

Or $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^c}$ CV (Riemann ; $c > 1$)

D'où $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(\ln n)^p}{n^a}$ converge.

Enfin $\boxed{\zeta \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur }]1,+\infty[}$

$\square$

Exercice d'application :

Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 t^n f(t)dt = 0$$

1) Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \int_0^1 P(t)f(t)dt = 0$

2) En déduire que $f = 0$

Solution :

1) Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \int_0^1 P(t)f(t)dt = 0$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. M. que $\int_0^1 P(t)f(t)\,dt = 0$.

Notons $P(X) = \sum_{k=0}^{s} a_k X^k$. On a :

$$\int_0^1 P(t)f(t)\,dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{s} a_k t^k\right) f(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{s} a_k t^k f(t)\right) dt$$

$$= \sum_{k=0}^{s} \left(\int_0^1 a_k t^k f(t)\,dt\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{s} a_k \cdot \underbrace{\int_0^1 t^k f(t)\,dt}_{=0}$$

$$= 0 \quad \square$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 t^n f(t)dt = 0$$

↳ On a ça

Rappel

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{s} f_k\right) = \sum_{k=0}^{s} \left(\int_0^1 f_k\right)$$

Linéarité de l'intégrale.
« somme finie »

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 t^n f(t)dt = 0$$

1) Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X], \int_0^1 P(t)f(t)dt = 0$

2) En déduire que $f = 0$

Pour montrer que $f=0$ sur $[0,1]$, il suffit qu'on vérifie que :

$$\int_0^1 f^2(t)\,dt = 0$$

Car $f^2 \geqslant 0$ et continue sur $[0,1]$.

$\boxed{f \in C([0,1],\mathbb{R})}$

Rappel

(Théorème d'approximation de Weierstrass)
Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$.
Toute fonction , réelle ou complexe, continue sur $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

On a f continue sur $[0,1]$.

Alors d'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \int_0^1 P(t)f(t)dt = 0$$

On a

On veut : $\int_0^1 f^2(t)\,dt \overset{?}{=} 0$

Piste 1

On a $\forall n\in\mathbb{N}, \int_0^1 P_n(t)f(t)\,dt = 0$

$$\Longrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, \int_0^1 f^2(t)\,dt = \int_0^1 \left(f^2(t) - P_n(t)f(t)\right) dt$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 f^2(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\left(f(t) - P_n(t)\right)dt$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 f^2(t)\,dt = \left| \int_0^1 f(t)\left(f(t) - P_n(t)\right)dt \right|$$

$$\leqslant \int_0^1 |f(t)| \cdot \underbrace{|f(t) - P_n(t)|}_{\leqslant \|f - P_n\|_\infty} dt$$

$$\leqslant \int_0^1 |f(t)| \cdot \|f - P_n\|_\infty \, dt$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \int_0^1 f^2(t)\,dt \leqslant \left(\int_0^1 |f(t)|\,dt\right) \cdot \|f - P_n\|_\infty$$

Or $\|f - P_n\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ Car (P_n) Converge Unif vers f sur $[0,1]$

D'où
$$\boxed{\int_0^1 f^2(t)\,dt = 0}$$
$\square$

Piste 2

On a $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 P_n(t) f(t)\,dt = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^1 P_n(t) f(t)\,dt \right) = 0$$

Outil

Si $\left(\begin{array}{l} 1)\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \ est\ continue\ sur\ [a,b] \\ 2)\ (f_n)\ CU\ vers\ f\ sur\ [a,b] \end{array}\right)$

Alors $\displaystyle \lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)dt\right) = \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right) dt$

Montrons que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 P_n(t)\, f(t)\, dt\right) = \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} P_n(t)\, f(t)\right) dt$$

Il s'agit de vérifier les deux points suivants :

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n \cdot f$ est continue sur $[0,1]$

b) La suite de fonctions $(P_n \cdot f)_n$ Conv unif vers f^2 sur $[0,1]$.

Pour a) :

C'est vérifié car P_n et f continues sur $[0,1]$.

Pour b) :

Vérifions que $(P_n \cdot f)_n$ Conv unif vers f^2 sur $[0,1]$.

Outil

Si $\left\{\begin{array}{l} \textbf{1)}\ \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0 \\ \textbf{2)}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X,\ \left| f_n(x) - f(x) \right| \preceq \alpha_n \end{array}\right.$

$\boxed{\textbf{alors}}$ $(f_n)_n$ *converge uniformement* vers f sur X.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$. On a :

$$\left| P_n(t) f(t) - (f(t))^2 \right| = \underbrace{|f(t)|}_{\leq \|f\|_\infty} \cdot \underbrace{|P_n(t) - f(t)|}_{\leq \|P_n - f\|_\infty}$$

(On doit se débarasser de t)

$$\leq \|f\|_\infty \times \underbrace{\|P_n - f\|_\infty}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Or $\|P_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, car $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Alors $(P_n \cdot f)_n$ conv unif vers f^2 sur $[0,1]$.

Ainsi : $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^1 P_n(t) f(t)\, dt \right) = \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} P_n(t) f(t) \right) dt \quad (\Omega)$

Or : $\left(\forall t \in [0,1], \lim_{n\to+\infty} P_n(t) = f(t) \right)$, car (P_n) converge simplement vers f sur $[0,1]$, car converge uniformément.

(Ω) devient : $\displaystyle 0 = \int_0^1 f^2(t)\, dt$

$\boxed{\text{CQFD}}$

Piste 3

$$0 = \int_0^1 f^2(t)\,dt$$
On veut

On a $\left(\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 P_n(t) f(t)\,dt = 0\right)$ (W)

Considérons l'application $\psi : C([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$h \longmapsto \psi(h) = \int_0^1 h(t) f(t)\,dt$$

ψ est linéaire (claire).

$$(W) \Rightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N},\ \psi(P_n) = 0\right)$$

$$\Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} \psi(P_n) = 0$$

On a : $\lim_{n \to +\infty} P_n = f$ pour $\|\cdot\|_\infty$ car (P_n) CU vers f sur $[0,1]$

Et ψ continue sur $C([0,1],\mathbb{R})$ car :

$$\forall h \in C([0,1],\mathbb{R}),\ |\psi(h)| = \left|\int_0^1 h(t) f(t)\,dt\right|$$

$$\leq \int_0^1 \underbrace{|h(t)|}_{\leq \|h\|_\infty} \cdot |f(t)|\,dt$$

$$\leq \left(\int_0^1 |f(t)|\,dt\right) \cdot \|h\|_\infty$$

D'où $\lim_{n \to +\infty} \psi(P_n) = \psi(f)$ (caract séq de la continuité)

Ainsi $\boxed{0 = \int_0^1 f^2(t)\,dt}$ $\square$

Piste 4

On a $\left(\forall P \in \mathbb{R}[X], \int_0^1 P(t) f(t)\,dt = 0\right)$ (W)

Considérons l'application $\Psi : C([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$h \longmapsto \Psi(h) = \int_0^1 h(t) f(t)\,dt$$

Ψ est linéaire et Continue (Comme vu ci-dessus).

$$(W) \Longrightarrow \left(\forall P \in \mathbb{R}[X], \Psi(P) = 0\right)$$

D'où $\left(\forall f \in C([0,1],\mathbb{R}), \Psi(f) = 0\right)$

Car $\mathbb{R}[X]$ est dense dans l'ev $\left(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$ d'après Weierstrass

Càd : $\boxed{\forall f \in C([0,1],\mathbb{R}),\ \int_0^1 f^2(t)\,dt = 0}$

$\square$