Ce qui est marqué en jaune est Corrigé à présent.
Je corrigerai le reste après.

Familles sommables

Exercice 1 :

1) Déterminer les réels α tels que la famille $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ soit sommable.
2) Montrer que

$$\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \textit{ sommable} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{(m+n)^{2\alpha}}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \textit{ sommable}$$

3) En déduire les réels α pour lesquels la famille $\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

Exercice 2 :

Soient $0 \preceq r \prec 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Montrer l'existence de la somme suivante et calculer sa valeur : $\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|}e^{im\theta}$

Exercice 3 :

Montrer l'existence de la somme suivante et calculer sa valeur :

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}$$

Exercice 4 :

Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{N}^*$.
Déterminer la nature des séries suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$
2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(\sigma(n))^2}$
3) $\displaystyle\sum_{\substack{n\geq 1\\ n}} \frac{\sigma(n)}{n^2}$; ***Indice :*** *Considérer* $S_{2n}-S_n$ *, où* S_n *la somme partielle d'ordre*
4) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sigma(n)}$; ***Indice :*** *Vous pouvez utiliser le résultat de 2)*

Exercice 5 :

Soit $n \geq 1$. Considérons les séries $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ où $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
Montrer que les séries $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ convergent, alors que leur série produit de Cauchy diverge.

Exercice 6 :

Montrer l'existence de la somme suivante et calculer sa valeur :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$$

Exercice 7 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille sommable.
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} 2^k u_k}{2^n}$.
Montrer que la famille $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, et déterminer sa somme en fonction de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 8 :

1) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente.

   On rappelle que : $\forall n \in \mathbb{C},\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$

2) Montrer, via le produit de Cauchy de deux séries, que :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$$

3) Soit A une algèbre normée de dimension finie. Soient u et v deux éléments de A qui commuttent.
   Notons $S_n(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$

   a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ ||S_n(u)S_n(v) - S_n(u+v)|| \preceq S_n(||u||)S_n(||v||) - S_n(||u|| + ||v||)$$

   b) En déduire que :

$$e^{u+v} = e^u \times e^v$$

FAMILLES SOMMABLES

Exercice 1 :

1) Déterminer les réels α tels que la famille $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ soit sommable.

CORRECTION

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in \mathbb{N}^{*2}}$ est sommable $\Longleftrightarrow$?

Rappel 1

$(I_n)_{n\geq 2}$ est une partition de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

où $I_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* / i+j = n\}$

Rappel 2

$(a_i)_{i\in I}$ famille positive et I dénombrable.

$(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une partition de I. On a :

$$(a_i)_{i\in I} \text{ sommable} \Longleftrightarrow \begin{cases} a) \ \forall k \in \mathbb{N},\ (a_i)_{i\in I_k} \text{ est sommable} \\ b) \text{ La série } \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{i\in I_k} a_i\right) \text{ converge} \end{cases}$$

La famille $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est positive.

Et $(I_k)_{k\geq 2}$ est une partition de $(\mathbb{N}^*)^2$, où $I_k=\{(i,j)\in\mathbb{N}^{*2} / i+j=k\}$

D'où :

$$\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}} \text{ est sommable} \iff \begin{cases} a)\ \forall k\geq 2,\ \left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in I_k} \text{ est sommable} \\ \\ b)\ \text{La série } \sum_{k\geq 2}\left(\sum_{(m,n)\in I_k}\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right) \text{ Converge} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Pour a) } \forall k\geq 2,\ \left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in I_k} \text{ est sommable}}$$

C'est vérifié car c'est une famille finie, donc sommable.

Notons que $I_k=\{(i,j)\in\mathbb{N}^{*2} / i+j=k\}=\{(i,k-i) \ / \ 1\leq i\leq k-1\}$

D'où I_k est fini et $\mathrm{Card}(I_k)=k-1$ $\square$

$$\boxed{\text{Pour b)}}$$

Soit $k\geq 2$. On a :

$$\sum_{(m,n)\in I_k}\frac{1}{(m+n)^\alpha}=\sum_{(m,n)\in I_k}\underbrace{\frac{1}{k^\alpha}}_{\text{constante}}$$

$(m,n)\in I_k \iff m+n=k$

$$=\mathrm{Card}(I_k)\times\frac{1}{k^\alpha}$$

$$=\frac{k-1}{k^\alpha}$$

Alors

$$\sum_{k\geq 2}\left(\sum_{(m,n)\in I_k}\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right) \text{ converge} \iff \text{La série } \sum_{k\geq 2}\left(\sum_{(m,n)\in I_k}\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right) \text{ converge.}$$

$$\iff \sum_{k\geq 2}\frac{k-1}{k^\alpha} \text{ converge}$$

$$\iff \sum_{k\geq 2}\frac{1}{k^{\alpha-1}} \text{ converge}$$

Car $\dfrac{k-1}{k^\alpha} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{k}{k^\alpha} \sim \dfrac{1}{k^{\alpha-1}}$

$$\iff \alpha-1>1 \quad (\text{série de Riemann})$$

$$\iff \alpha>2$$

Enfin :

$$\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}} \text{ est sommable} \iff \text{La série } \sum_{k\geq 2}\left(\sum_{(m,n)\in I_k}\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right) \text{ converge} \iff \alpha>2$$

$\square$

1) Déterminer les réels α tels que la famille $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ soit sommable.

2) Montrer que

$$\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \textit{ sommable} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{(m+n)^{2\alpha}}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \textit{ sommable}$$

3) En déduire les réels α pour lesquels la famille $\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

CORRECTION

L'idée

Ça saute aux yeux !
Ça doit être par comparaison des familles positives.

Comparons $\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}$ et $\frac{1}{(m+n)^{2\alpha}}$.

En ignorant le α, comparons $\frac{1}{(m^2+n^2)}$ et $\frac{1}{(m+n)^2}$.

Càd, comparons (m^2+n^2) et $(m+n)^2$.

Soit $(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

On a : $(m+n)^2 = m^2+n^2+2mn \geqslant m^2+n^2$

$\Rightarrow m^2+n^2 \leqslant (m+n)^2$

Et on a :

$2mn \leqslant m^2+n^2$ (car $(m-n)^2 \geqslant 0$)

$$\Rightarrow (m+n)^2 = m^2+n^2+2mn \leqslant 2(m^2+n^2)$$

D'où $m^2+n^2 \leqslant (m+n)^2 \leqslant 2(m^2+n^2)$

Levons à la puissance α.

On sait que la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est croissante sur $]0,+\infty[$ si $\alpha \geqslant 0$ et décroissante si $\alpha < 0$.

Cas 1 : Si $\alpha \geqslant 0$

On a $m^2+n^2 \leqslant (m+n)^2 \leqslant 2(m^2+n^2)$

$$\Rightarrow \quad (m^2+n^2)^\alpha \leqslant (m+n)^{2\alpha} \leqslant 2^\alpha (m^2+n^2)^\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2^\alpha (m^2+n^2)^\alpha} \leqslant \frac{1}{(m+n)^{2\alpha}} \leqslant \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}}$$

Par comparaison des familles positives on tire que :

$$\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \text{ sommable} \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{(m+n)^{2\alpha}}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \text{ sommable}$$

CQFD

Cas 2 : Si $\alpha < 0$

On a $m^2+n^2 \leqslant (m+n)^2 \leqslant 2(m^2+n^2)$

$$\Rightarrow \quad (m^2+n^2)^{\alpha} \geqslant (m+n)^{2\alpha} \geqslant 2^{\alpha}(m^2+n^2)^{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{(m^2+n^2)^{\alpha}} \leqslant \frac{1}{(m+n)^{2\alpha}} \leqslant \frac{1}{2^{\alpha}(m^2+n^2)^{\alpha}}}$$

Par comparaison des familles positives on tire que :

$$\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^{\alpha}}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \text{ sommable} \iff \left(\frac{1}{(m+n)^{2\alpha}}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \text{ sommable}$$

CQFD

$\square$

1) Déterminer les réels α tels que la famille $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ soit sommable.

2) Montrer que

$$\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \textit{ sommable} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{(m+n)^{2\alpha}}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \textit{ sommable}$$

3) En déduire les réels α pour lesquels la famille $\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable. ?

CORRECTION

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \text{ sommable} \iff \left(\frac{1}{(m+n)^{2\alpha}}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \text{ sommable} \quad (\text{d'après } 2^\circ)$$

$$\iff 2\alpha > 2 \quad (\text{d'après } 1^\circ)$$

$$\iff \alpha > 1$$

$\square$

Fin Exercice 1

Exercice 2 :

Soient $0 \preceq r \prec 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Montrer l'existence de la somme suivante et calculer sa valeur : $\sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|}e^{im\theta}$

CORRECTION

Soient $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Montrer l'existence de la somme $\sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|} e^{im\theta}$ revient à montrer que la famille $\left(r^{|m|} e^{im\theta}\right)_{m\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

Montrons que la famille $\left(r^{|m|} e^{im\theta}\right)_{m\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

On a :

$\left(r^{|m|} e^{im\theta}\right)_{m\in\mathbb{Z}}$ est sommable $\iff$??

Rappel

$(a_i)_{i\in I}$ famille de réels ou complexes et I dénombrable.

I_1 et I_2 forment une partition de I. On a :

1) $(a_i)_{i\in I}$ sommable $\iff$ $(a_i)_{i\in I_1}$ et $(a_i)_{i\in I_2}$ sommables

2) Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I_1} a_i + \sum_{i\in I_2} a_i}$$

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}^{-*}$ forment une partition de $\mathbb{Z}$.

D'où :

$$\left(r^{|m|}e^{im\theta}\right)_{m\in\mathbb{Z}} \text{ est sommable} \iff \left(r^{|m|}e^{im\theta}\right)_{m\in\mathbb{N}} \text{ et } \left(r^{|m|}e^{im\theta}\right)_{m\in\mathbb{Z}^{-*}} \text{ sommables}$$

D'autre part :

On a $0\leq r<1$ et $\theta\in\mathbb{R}$

$$\left(r^{|m|}e^{im\theta}\right)_{m\in\mathbb{N}} \text{ sommable} \iff ?$$

Rappel

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série à termes réels ou complexes. On a :

1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sommable $\iff$ La série $\sum_{n\geq 0} a_n$ ACV

2) Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n}$$

$$\iff \text{La série } \sum_{m\geq 0} r^{|m|}e^{im\theta} \text{ est ACV}$$

$$\iff \sum_{m\geq 0} \left|r^{|m|}e^{im\theta}\right| \text{ converge}$$

$$\iff \sum_{m\geq 0} r^m \text{ converge} \quad \left(\text{car } \begin{cases} |e^{im\theta}|=1 \\ |m|=m \end{cases}\right)$$

Ce qui est vrai car $\sum_{m\geq 0} r^m$ est une série géométrique et $0\leq r<1$.

D'où $\left(r^{|m|}e^{im\theta}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ est sommable. $\square$

$$\left(r^{|m|}e^{im\theta}\right)_{m\in\mathbb{Z}^{-*}} \text{ sommable} \iff ?$$

On a $0\leq r<1$ et $\theta\in\mathbb{R}$

Rappel

I est supposé dénombrable.

Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow I$ une bijection.

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou complexes. On a :

1) $\boxed{(a_i)_{i\in I} \text{ sommable} \iff \text{La série } \sum_{n\geq 1} a_{\sigma(n)} \text{ ACV}}$

2) Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)}}$$

L'application $\sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Z}^{-*}$ est une bijection.
$n \longmapsto -n$

D'où :

$\left(r^{|m|} e^{im\theta}\right)_{m\in\mathbb{Z}^{-*}}$ sommable $\iff$ La série $\sum_{n\geq 1} r^{|\sigma(n)|} e^{i\sigma(n)\theta}$ est ACV

$\iff \sum_{n\geq 1} r^n e^{-in\theta}$ est ACV

$\iff \sum_{n\geq 1} \left| r^n e^{-in\theta} \right|$ Converge

$\iff \sum_{n\geq 1} r^n$ Converge

Ce qui est vrai car $\sum_{n\geq 1} r^n$ est une série géométrique et $0 \leq r < 1$.

D'où $\left(r^{|m|} e^{im\theta}\right)_{m\in\mathbb{Z}^{-*}}$ sommable $\square$

Enfin $\left(r^{|m|}e^{im\theta}\right)_{m\in\mathbb{Z}}$ est sommable $\square$

Calculons la somme $\sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|}e^{im\theta}$:

Rappel

$(a_i)_{i\in I}$ famille de réels ou complexes et I dénombrable.

I_1 et I_2 forment une partition de I. On a :

1) $(a_i)_{i\in I}$ sommable $\Leftrightarrow$ $(a_i)_{i\in I_1}$ et $(a_i)_{i\in I_2}$ sommables

2) Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I_1} a_i + \sum_{i\in I_2} a_i}$$

La famille $\left(r^{|m|}e^{im\theta}\right)_{m\in\mathbb{Z}}$ est sommable, et $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}^{-*}$ forment une partition de $\mathbb{Z}$.

D'où

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|}e^{im\theta} = \sum_{m\in\mathbb{N}} r^{|m|}e^{im\theta} + \sum_{m\in\mathbb{Z}^{-*}} r^{|m|}e^{im\theta}$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} r^{|m|}e^{im\theta} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^{|-n|}e^{-in\theta} \quad \text{(voir les rappels ci-dessus)}$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} r^{m}e^{im\theta} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^{n}e^{-in\theta}$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} (re^{i\theta})^m + \sum_{n=1}^{+\infty} (re^{-i\theta})^n$$

$$\sum_{n=N}^{+\infty} q^n = \frac{q^N}{1-q}$$

Si $|q|<1$

Rappel

$$= \frac{1}{1-re^{i\theta}} + \frac{re^{-i\theta}}{1-re^{-i\theta}}$$

$$= \frac{1-r^2}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})}$$

$$= \frac{1-r^2}{1-r(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+r^2}$$

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|} e^{im\theta} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

Fin Exercice 2

Exercice 3 :

Montrer l'existence de la somme suivante et calculer sa valeur :

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}$$

CORRECTION

Montrer l'existence de la somme $\displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}$ revient à

montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ est sommable.

Rappel

Soit $(a_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double positive.

1) Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) $(a_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

ii) A) $\forall m\in\mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_{mn}$ converge

B) La série $\displaystyle\sum_{m\geq 0}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{mn}\right)$ converge.

iii) A) $\forall n\in\mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{m\geq 0} a_{mn}$ converge

B) La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{mn}\right)$ converge.

2) Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{mn} = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{mn}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{mn}\right)}$$

On a :

$$\left(\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \text{ est sommable} \iff \begin{cases} \forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{m\geqslant 0}\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} \text{ CV} \\ \sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}\right) \text{ CV}\end{cases}$$

(A) Pour $\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{m\geqslant 0}\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}$ CV

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Mq que la série $\sum_{m\geqslant 0}\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}$ CV

On a $\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} \underset{m\to+\infty}{\sim} \frac{1}{m^2}$

Et $\sum_{m\geqslant 1}\frac{1}{m^2}$ converge (Riemann ; $\alpha = 2 > 1$)

D'où par comparaison des séries positives, la série $\sum_{m\geqslant 0}\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}$ CV $\square$

(B) Pour $\sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}\right)$ CV

Soit $n\geqslant 1$. On a :

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} = \lim_{m\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{(k+n^2)(k+n^2+1)}\right)$$

$$= \lim_{m \to +\infty} \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{1}{k+n^2} - \frac{1}{k+n^2+1} \right)$$

$$= \lim_{m \to +\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m+n^2+1} \right) \quad \left(\text{Somme télescopique}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} = \frac{1}{n^2}$$

La série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} \right)$ est donc $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ qui est Convergente, Comme série de Riemann $(\alpha = 2 > 1)$. $\square$

Enfin $\displaystyle\left(\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} \right)_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ est sommable et on a :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \Bigg(\underbrace{\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}}_{= \frac{1}{n^2}} \Bigg)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{6} \quad \square$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

somme classique

Fin Exercice 3

Exercice 4 :

Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{N}^*$.
Déterminer la nature des séries suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$

CORRECTION

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sigma(n)}$ converge $\Longleftrightarrow$?

Rappel

I est supposé dénombrable.
Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow I$ une bijection.
Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille positive. On a

1) $\boxed{(a_i)_{i\in I} \text{ sommable } \Longleftrightarrow \text{ La série } \sum_{n\geqslant 1} a_{\sigma(n)} \text{ converge}}$

On a $\begin{cases} \sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^* \text{ est une bijection} \\ \left(\frac{1}{i}\right)_{i\in\mathbb{N}^*} \text{ est une famille positive} \end{cases}$

D'où $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sigma(n)}$ converge $\Longleftrightarrow \left(\frac{1}{i}\right)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est sommable

$\Longleftrightarrow$??

Rappel

Soit $\sum_{n\geq 1} a_n$ une série à termes positifs. On a :

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sommable $\Longleftrightarrow$ La série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge

D'où :

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$ converge $\Longleftrightarrow \left(\frac{1}{i}\right)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est sommable

$\Longleftrightarrow \sum_{i\geq 1} \frac{1}{i}$ converge (famille positive)

Or $\sum_{i\geq 1} \frac{1}{i}$ diverge, comme série de Riemann $(\alpha = 1 \leq 1)$

D'où $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$ diverge aussi. $\square$

Exercice 4 :

Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{N}^*$.

Déterminer la nature des séries suivantes :

1) $\sum_{n>1} \frac{1}{\sigma(n)}$

2) $\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(\sigma(n))^2}}$?

CORRECTION

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(\sigma(n))^2} \text{ converge} \iff ?$$

Rappel

I est supposé dénombrable.

Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow I$ une bijection.

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille positive. On a

1) $\boxed{(a_i)_{i\in I} \text{ sommable} \iff \text{La série } \sum_{n\geqslant 1} a_{\sigma(n)} \text{ converge}}$

On a $\begin{cases} \sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^* \text{ est une bijection} \\ \left(\frac{1}{i^2}\right)_{i\in\mathbb{N}^*} \text{ est une famille positive} \end{cases}$

D'où $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(\sigma(n))^2}$ converge $\iff \left(\frac{1}{i^2}\right)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est sommable

$\iff$??

Rappel

Soit $\sum_{n\geq 1} a_n$ une série à termes positifs. On a :

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sommable $\Longleftrightarrow$ La série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge

D'où :

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(\sigma(n))^2}$ converge $\Longleftrightarrow \left(\frac{1}{i^2}\right)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est sommable

$\Longleftrightarrow \sum_{i\geq 1} \frac{1}{i^2}$ converge (famille positive)

Or $\sum_{i\geq 1} \frac{1}{i^2}$ converge, comme série de Riemann $(\alpha = 2 > 1)$

D'où $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(\sigma(n))^2}$ converge aussi. $\square$

Exercice 6 :

Montrer l'existence de la somme suivante et calculer sa valeur :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$$

CORRECTION

Brouillon :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^n} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} \right)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \right) \text{ ; où } \begin{cases} u_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k \\ v_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k \end{cases}$$

Rédaction :

On veut montrer l'existence de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$, et de déterminer sa valeur.

On montrera que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{3^n}$ converge.

On a : $$\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} \right)$$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{3^n} = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \right) \text{, où } \begin{cases} u_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k \\ v_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k \end{cases}$$

Alors $\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{3^n}$ est le produit de Cauchy des deux séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$, où $u_n = v_n = \frac{1}{3^n}$.

Or $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ est ACV, comme série géométrique et que $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$.

d'où la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{3^n}$ est ACV, donc converge, et

l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n} = \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}_{= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}} \times \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}_{= \frac{3}{2}}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n} = \frac{9}{4}}$$

Exercice 7 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille sommable.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} 2^k u_k}{2^n}$.

Montrer que la famille $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, et déterminer sa somme en fonction de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

CORRECTION

Montrons que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.

Il s'agit de montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ est absolument convergente.

On a :

$$\sum_{n\geqslant 0} w_n = \sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{\sum_{k=0}^{n} 2^k u_k}{2^n}\right)$$

$$= \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k \cdot \frac{1}{2^{n-k}}\right)$$

$$\sum_{n\geqslant 0} w_n = \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\right)$$

D'où $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ est le produit de Cauchy des deux séries

$\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$\sum_{n\geq 0} U_n$ est ACV car la famille $(U_n)_{n\geq 0}$ est sommable.

Et la série $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est ACV, comme série géométrique

avec $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$.

D'où $\boxed{\sum_{n\geq 0} W_n \text{ est ACV}}$.

Et on a aussi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} W_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} U_n\right) \times \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}_{= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2}$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$$

Or : $\sum_{n\in\mathbb{N}} W_n = \sum_{n=0}^{+\infty} W_n$

Alors : $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} W_n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} U_n}$