Problème 2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, on appelle fonction génératrice d'une variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\mathbb{N}$, lorsqu'elle existe, la fonction G_X définie par: $G_X(t) = E(t^X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} t^k P(X = k)$.

Partie I

Quelques propriétés de la fonction génératrice et quelques exemples

1. Montrer que la fonction génératrice G_X est au moins définie sur l'intervalle [-1,1].
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $G_X^{(k)}(0) = k!P(X = k)$.
3. Donner l'expression de G_X, en précisant le domaine de définition, dans chaque cas suivant:
   a) X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, notée $\mathcal{B}(p)$, où $p \in [0,1]$.
   b) X suit la loi binomiale de paramètre n, p, notée $\mathcal{B}(n,p)$, où $n \in \mathbb{N}^*, p \in [0,1]$.
   c) X suit la loi géométrique de paramètre p, notée $G(p)$, où $p \in]0,1[$.
4. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance si, et seulement si, G_X est dérivable en 1 et dans ce cas $G'_X(1) = E(X)$.
5. Montrer que la variable aléatoire X admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si, G_X est deux fois dérivable en 1 et dans ce cas $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$.
6. En déduire l'espérance et la variance d'une variable aléatoire qui suit la loi géométrique $G(p)$ de paramètre p, où $p \in]0,1[$.

Partie II

La fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires

Soient n un entier naturel non nul et N une variable aléatoire telle que $N(\Omega) = [\![1,n]\!] = \{1,\ldots,n\}$. On suppose que pour tout k de $[\![1,n]\!]$, $P(N = k)$ est non nul. On considère n variables aléatoires indépendantes $(X_i)_{1\leq i\leq n}$, toutes de même loi qu'une variable aléatoire X, telle que $X(\Omega) = [\![1,m]\!]$, avec m un entier naturel non nul. On pose $S = \sum\limits_{i=1}^{N} X_i$, (en particulier, sachant que l'événement $(N = h)$ est réalisé, $h \in [\![1,n]\!]$, alors $S = \sum\limits_{i=1}^{h} X_i$).

1. Montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $G_{X_1+\ldots+X_k} = G_X^k$.
2. a) Soit Y une variable aléatoire réelle qui prend un nombre fini de valeurs dans $Y(\Omega)$, montrer que $E(Y) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(N = k)E(Y|[N = k])$, où $\forall k \in [\![1,n]\!]$,
   $E(Y|[N = k]) = \sum\limits_{y\in Y(\Omega)} yP\left((Y = y)|[N = k]\right)$ désigne l'espérance de Y sachant l'événement $[N = k]$ et $P\left((Y = y)|[N = k]\right)$ désigne la probabilité de $(Y = y)$ sachant l'événement $[N = k]$.
   b) Montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ et pour tout réel t, $E(t^S|[N = k]) = G_X^k(t)$.
   c) En déduire que pour tout réel t, $G_S(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(N = k)G_X^k(t)$.
   d) Montrer que $G_S = G_N \circ G_X$.
3. En déduire que $E(S) = E(N)E(X)$.

Partie III

Application

On dispose d'un jeton non truqué à deux faces numérotées 1 et 2 et d'un dé tétraédrique (famille des pyramides composés de quatre faces triangulaires), équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On lance le jeton et on note N le numéro obtenu, puis on lance N fois le dé et pour chaque lancer, on note le numéro de la face d'appui du dé. Soit S la somme des numéros obtenus lors de ces N lancers, (si $N = 1$, le dé est lancé une seule fois et S est le numéro lu sur la face d'appui du dé).

1. a) Déterminer la loi de N.

   b) Donner la loi conditionnelle de S sachant $[N = k]$, pour $k = 1$, puis pour $k = 2$.

   c) En déduire la loi de S, puis son espérance et sa variance.

2. a) Identifier la variable aléatoire X telle que $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, où X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi que X.

   b) Déterminer les fonctions génératrices G_N et G_X et en déduire la fonction génératrice G_S.

   c) Retrouver, en utilisant la fonction génératrice G_S, la loi, l'espérance et la variance de S.

Fin