Transposition d'un endomorphisme

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$; où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.
On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.
Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\varphi \in E^*$ on note ${}^T f(\varphi) = \varphi \circ f$.
L'application $f \mapsto {}^T f$ s'appelle la transposition de $\mathcal{L}(E)$.

1) a) Montrer que la transposition est une application de $\mathcal{L}(E)$ vers $\mathcal{L}(E^*)$.

   b) Montrer que la transposition est une application linéaire.

   c) Montrer que la transposition est une application injective.

2) Montrer que

$$\forall\ f, g \in \mathcal{L}(E)\ ,\ {}^T(g \circ f) = {}^T f \circ {}^T g$$

3) a) Identifier l'application ${}^T(Id_E)$.

   b) Soit f un automorphisme de E.
   Montrer que ${}^T f$ est un automorphisme de E^* et que $({}^T f)^{-1} = {}^T(f^{-1})$.

   c) Soit maintenant $f \in \mathcal{L}(E)$.
   Supposons que ${}^T f$ est un automrphisme de E^*.
   Montrer que f est automorphisme de E.

Solution

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$; où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.
On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.
Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\varphi \in E^*$ on note ${}^T f(\varphi) = \varphi \circ f$.
L'application $f \mapsto {}^T f$ s'appelle la transposition de $\mathcal{L}(E)$.

1) a) Montrer que la transposition est une application de $\mathcal{L}(E)$ vers $\mathcal{L}(E^*)$.

Notons $\phi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E^*)$
$\qquad f \mapsto \phi(f) = {}^T f$.

Montrons que ϕ est une application de $\mathcal{L}(E)$ vers $\mathcal{L}(E^*)$.

C'àd que si $f \in \mathcal{L}(E)$ alors son image $\phi(f) = {}^T f \in \mathcal{L}(E^*)$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. M que ${}^T f \in \mathcal{L}(E^*)$:

(i) M. que $^T f$ est une application de E^* vers E^*.

(ii) M que $^T f$ est linéaire

Pour (i) M. que $^T f$ est une application de E^* vers E^* :

Soit $\varphi \in E^*$, vérifions que ${}^T f(\varphi) \in E^*$:

On a ${}^T f(\varphi) = \varphi \circ f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = E^*$ car

$f \in \mathcal{L}(E)$
$\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$
la composée de 2 applic linéaires est une applic linéaire

Pour (ii) M que $^T f$ est linéaire

Soient φ et $\psi \in E^*$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. M que ${}^T f(\alpha\varphi + \psi) = \alpha\, {}^T f(\varphi) + {}^T f(\psi)$

$${}^T f(\alpha\varphi + \psi) = (\alpha\varphi + \psi) \circ f = \alpha . \underbrace{\varphi \circ f}_{= {}^T f(\varphi)} + \underbrace{\psi \circ f}_{= {}^T f(\psi)} = \alpha\, {}^T f(\varphi) + {}^T f(\psi)$$

www.iamateacher.org

Pr. ELAMIRI

b) Montrer que la transposition est une application linéaire.

Notons $\phi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E^*)$

$f \mapsto \phi(f) = {}^T f$

Mq que ϕ est linéaire

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Mq que $\phi(\alpha f + g) = \alpha \phi(f) + \phi(g)$

Càd Mq que : $\boxed{{}^T(\alpha f + g) = \alpha . {}^T f + {}^T g}$

Soit alors $\varphi \in E^*$. Mq que $\left({}^T(\alpha f + g)\right)(\varphi) = \left(\alpha . {}^T f + {}^T g\right)(\varphi)$

On a :

$\boxed{{}^T f(\varphi) = \varphi \circ f}$

$$\begin{aligned}
\left({}^T(\alpha f + g)\right)(\varphi) &= \varphi \circ (\alpha f + g) \\
&= \alpha \underbrace{\varphi \circ f}_{= {}^T f(\varphi)} + \underbrace{\varphi \circ g}_{= {}^T g(\varphi)} \\
&= \alpha\, {}^T f(\varphi) + {}^T g(\varphi) \\
&= \left(\alpha . {}^T f + {}^T g\right)(\varphi)
\end{aligned}$$

www.iamateacher.org

Pr. ELAMIRI

c) Montrer que la transposition est une application injective.

$$\phi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E^*) \quad \text{est linéaire.}$$
$$f \longmapsto \phi(f) = {}^t f$$

Et on veut montrer que ϕ est injective :

Soit alors $f \in \mathcal{L}(E)$. Supp que $\phi(f) = 0$ et mq que $f = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{l} {}^t f : E^* \longrightarrow E^* \\ \qquad \varphi \longmapsto \varphi \circ f \end{array}}$$

On a : $\phi(f) = 0 \Rightarrow {}^t f = 0$

$\Rightarrow \forall \varphi \in E^*, \ {}^t f(\varphi) = 0$

$\Rightarrow \left(\forall \varphi \in E^*, \ \varphi \circ f = 0\right)$ ☆

On veut mq que $f = 0$

Soit $x \in E$. Mq que $\boxed{f(x) = 0}$

☆ $\Rightarrow \forall \varphi \in E^*, \ \varphi \circ f = 0$

$\Rightarrow \forall \varphi \in E^*, \ \varphi(f(x)) = 0$

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

On a $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, où $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

On montrera que : $(\forall 1 \leq i \leq n, \ \alpha_i = 0)$.

On a $\left(\forall \varphi \in E^*, \ \varphi(f(x)) = 0\right)$

Alors $\left(\forall i \in [\![1, n]\!], \ e_i^*(f(x)) = 0\right)$, où $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de B.

D'où $\left(\forall i \in [\![1, n]\!], \ \alpha_i = 0\right)$

$\Rightarrow f(x) = 0$ CQFD $\square$

Rappel : $e_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_i\right) \underset{\text{par déf}}{=} x_i$

www.iamateacher.org
Pr. ELAMIRI

2) Montrer que

$$\forall\, f,g \in \mathcal{L}(E)\ ,\ {}^T(g\circ f) = {}^Tf \circ {}^Tg$$

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. M.q. ${}^T(g\circ f) = {}^Tf \circ {}^Tg$.

Soit alors $\varphi \in E^*$. Il s'agit de montrer que :

$$T_{(g\circ f)}(\varphi) = ({}^Tf \circ {}^Tg)(\varphi)$$

On a :

$$T_{(g\circ f)}(\varphi) = \varphi \circ (g\circ f)$$

$$\begin{aligned}({}^Tf \circ {}^Tg)(\varphi) &= {}^Tf\left({}^Tg(\varphi)\right) \\ &= {}^Tf(\varphi\circ g) \\ &= (\varphi\circ g)\circ f \\ &= \varphi\circ(g\circ f)\end{aligned}$$

D'où l'égalité voulue :

$$T_{(g\circ f)}(\varphi) = ({}^Tf \circ {}^Tg)(\varphi) \quad \square$$

3) a) Identifier l'application ${}^T(Id_E)$.

D'abord ${}^T(Id_E) \in \mathcal{L}(E^*)$.

Soit $\varphi \in E^*$, on a :

$${}^T(Id_E)(\varphi) = \varphi \circ Id_E = \varphi$$

d'où : $\forall \varphi \in E^*,\ {}^T(Id_E)(\varphi) = \varphi$

Càd : ${}^T(Id_E) = Id_{E^*}$ $\square$

www.iamateacher.org
Pr. ELAMIRI

b) Soit f un automorphisme de E.
Montrer que ${}^T f$ est un automorphisme de E^* et que $({}^T f)^{-1} = {}^T(f^{-1})$.

Soit $f \in GL(E)$. M que ${}^T f \in GL(E^*)$.

On a ${}^T f \in \mathcal{L}(E^*)$. Montrons alors que ${}^T f$ est bijectif.

On a $f \circ f^{-1} = Id_E$

$\Rightarrow {}^T(f \circ f^{-1}) = {}^T(Id_E)$

$\Rightarrow {}^T(f^{-1}) \circ {}^T f = Id_{E^*}$

Ainsi
- ${}^T f \in \mathcal{L}(E^*)$
- ${}^T(f^{-1}) \circ {}^T f = Id_{E^*}$
- E^* de dimension finie

D'où ${}^T f$ est bijective et $({}^T f)^{-1} = {}^T(f^{-1})$ $\square$

c) Soit maintenant $f \in \mathcal{L}(E)$.
Supposons que ${}^T f$ est un automrphisme de E^*.
Montrer que f est automorphisme de E.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Supposons que ${}^T f \in GL(E^*)$.

M que $f \in GL(E)$.

On a ${}^T f \in GL(E^*)$, alors ${}^T f \circ ({}^T f)^{-1} = Id_{E^*}$

www.iamateacher.org
Pr. ELAMIRI

D'autre part, on a :

$$\phi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E^*)$$
$$f \longmapsto \phi(f) = {}^T f$$

est injective d'après $\boxed{1)c)}$.

D'où ϕ est bijective car $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{L}(E^*)$ de dimensions finies et $\dim(\mathcal{L}(E)) = \dim(\mathcal{L}(E^*))$, puisque :

$$\left| \begin{array}{l} \dim(\mathcal{L}(E)) = (\dim E)^2 \\ \dim(\mathcal{L}(E^*)) = (\dim(E^*))^2 = (\dim E)^2 \end{array} \right.$$

car $\dim(E^*) = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \dim E$

$$\phi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E^*)$$
$$f \longmapsto \phi(f) = {}^T f$$

étant bijective et $({}^T f)^{-1} \in \mathcal{L}(E^*)$

D'où : $\exists g \in \mathcal{L}(E), \ \phi(g) = ({}^T f)^{-1}$

C.à.d : $\boxed{\exists g \in \mathcal{L}(E), \ {}^T g = ({}^T f)^{-1}}$

Ainsi, ${}^T f \circ ({}^T f)^{-1} = Id_{E^*}$ devient : ${}^T f \circ {}^T g = Id_{E^*}$

D'où ${}^T(g \circ f) = {}^T(Id_E)$

$\Rightarrow \phi(g \circ f) = \phi(Id_E)$

$\Rightarrow g \circ f = Id_E$; car ϕ injective

Enfin $\boxed{f \text{ est bijectif}}$ $\square$

Fin

Pr. ELAMIRI www.iamateacher.org