EXTRAIT

ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 2025

MARDI 15 AVRIL 2025
08h00 - 12h00

FILIERES MP-MPI - Epreuve n° 3

MATHEMATIQUES B (X)

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Deuxième partie

Soit $I = [-1, 1]$. On fixe un entier $n \geqslant 2$ pour toute cette partie. Soit $f : I \to]0, +\infty[$ une fonction continue. On rappelle que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ en posant, pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$,

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)f(x)\,dx.$$

Soit $D \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme ayant n racines réelles distinctes $r_1 > \cdots > r_n$ dans I. On suppose de plus que $D \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$.

7a. Montrer qu'il existe des nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$\int_{-1}^{1} P(x)f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(r_i).$$

7b. Montrer que si $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on a

$$\int_{-1}^{1} P(x)f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(r_i). \tag{1}$$

Indication : on pourra considérer la division euclidienne de P par D.

7c. En évaluant l'égalité (1) sur le polynôme $\displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} (X - r_j)^2$, montrer que $\lambda_i > 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.

Pour $1 \leqslant j \leqslant n-1$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $f_j(t) = \displaystyle\prod_{i=1}^{j}(r_i - t)$ ainsi que $f_0(t) = 1$. Si $0 \leqslant j \leqslant n-1$ et $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\langle P, Q\rangle_j = \langle P, Qf_j\rangle.$$

7d. Montrer que, pour tout $0 \leqslant j \leqslant n-1$, $\langle \cdot, \cdot\rangle_j$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-j-1}[X]$.

Dans les questions **8.** à **12.** ci-dessous, on fixe un entier naturel $0 \leqslant j \leqslant n-1$.

8a. Montrer qu'il existe une unique famille $q_0, \ldots, q_{n-j-1}$ de polynômes unitaires de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\deg(q_i) = i$ pour $0 \leqslant i \leqslant n-j-1$ et telle que pour tous $0 \leqslant i \neq i' \leqslant n-j-1$,

$$\langle q_i, q_{i'}\rangle_j = 0.$$

8b. On pose $q_{n-j} = \displaystyle\prod_{i=j+1}^{n} (X - r_i)$. Montrer que q_{n-j} est l'unique polynôme unitaire de degré $n-j$ vérifiant, pour tout $0 \leqslant i \leqslant n-j-1$,

$$\langle q_i, q_{n-j}\rangle_j = 0.$$

9a. Soit $2 \leqslant i \leqslant n - j$. Montrer qu'il existe des nombres réels a_i et b_i tels que

$$q_i - Xq_{i-1} = a_i q_{i-1} + b_i q_{i-2}.$$

9b. Montrer que

$$b_i \langle q_{i-2}, q_{i-2} \rangle_j = -\langle Xq_{i-1}, q_{i-2} \rangle_j.$$

9c. Montrer que $b_i < 0$.

Fin Extrait