Extrait

Exercice

Calcul de la somme de la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^\pi \left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right)\cos(kx)dx = \frac{1}{k^2}$.
2. Soit $x \in]0, \pi]$.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = \frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}e^{i\frac{(n+1)x}{2}}$.
   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin(\frac{nx}{2})\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin(\frac{x}{2})}$.
3. Soit ψ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. Montrer à l'aide d'une integration par parties que $\lim\limits_{m\to+\infty} \int_0^\pi \psi(x)\sin(mx)dx = 0$.
4. Soit g la fonction réelle définie sur $[0, \pi]$ par $\begin{cases} g(x) = \frac{\frac{x^2}{2\pi}-x}{2\sin(\frac{x}{2})} & \text{si } x \in]0, \pi] \\ g(0) = -1 \end{cases}$.

   Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.
5. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi g(x)\sin(\frac{(2n+1)}{2}x)dx$.
   b) Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
6. Pour tout réel $x > 0$, on pose $\varphi(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+2nx)}$.
   a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\varphi(x)$ est bien définie.

Fin extrait