**Un corrigé du concours Mines Math-II- 2014 Filière MP**

Proposé par Mrs : HAMANI Ahmed

**A-Théorème du point fixe**

1. **Unicité du point fixe**
Supposons que $f$ admet deux points fixes $x, y \in A$ distincts, alors $\|x-y\| = \|f(x)-f(y)\| \leq k\|x-y\|$, donc $1 \leq k$, ce qui contredit $k \in [0,1[$.
2. $(x_n)_n$ **est de Cauchy**
— $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|x_{n+1}-x_n\| = \|f(x_n)-f(x_{n-1}\| \leq k\|x_n - x_{n-1}\|$, donc par récurrence $\|x_{n+1}-x_n\| \leq k^n\|x_1-x_0\|$.
— $\forall n, p \in \mathbb{N}, \|x_{n+p}-x_n\| = \|\displaystyle\sum_{j=n}^{n+p-1}(x_{j+1}-x_j)\| \leq \sum_{j=n}^{n+p-1}\|x_{j+1}-x_j\| \leq \sum_{j=n}^{n+p-1} k^j\|x_1-x_0\| =$
$= k^n\dfrac{1-k^p}{1-k}\|x_1-x_0\| \leq \dfrac{k^n}{1-k}\|x_1-x_0\|$, ce qui entraine que $\sup\limits_{p\in\mathbb{N}}\|x_{n+p}-x_n\| \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. **Conclusion**
La suite $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $A$ qui est complet comme fermé dans un complet, donc $(x_n)_n$ est convergente vers un certain $x \in A$, donc par passage à la limite $n \longrightarrow +\infty$ dans l'égalité $x_{n+1} = f(x_n)$ et grâce à la continuité de $f$, on obtient $x = f(x)$.

**B-Invariance par homotopie**

4. $T$ **n'est pas vide**
$f$ admet un point fixe, donc $\exists x \in A$, tel que $x = f(x) = h(x, 0)$, donc $0 \in T$.
5. **Existence de** $(x_n)_n$ **et majoration de** $\|x_n - x_m\|$
— $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n \in T$, donc par définition de $T$, $\exists x_n \in A$ tel que $x_n = h(x_n, t_n)$, ce qui assure l'existence de $(x_n)_n$.
— Les inégalités $\boxed{a}$ et $\boxed{b}$ entrainent que
$\forall n \geq m \in \mathbb{N}$, $\|x_n - x_m\| = \|h(x_n,t_n) - h(x_m,t_m)\| =$
$= \|h(x_n,t_n) - h(x_m,t_n) + h(x_m,t_n) - h(x_m,t_m)\| \leq \|h(x_n,t_n) - h(x_m,t_n)\| + \|h(x_m,t_n) - h(x_m,t_m)\| \leq k\|x_n-x_m\| + k'|t_n-t_m|$, donc $(1-k)\|x_n-x_m\| \leq k'|t_n-t_m|$, ce qui assure l'inégalité $\|x_n-x_m\| \leq \dfrac{k'}{1-k}|t_n-t_m|$.
6. $(x_n)_n$ **de Cauchy et** $T$ **est fermé**
— $(t_n)_n$ étant convergente, donc de Cauchy, ce qui assure par l'inégalité précédente que $(x_n)_n$ est de Cauchy dans $A$ qui est complet, donc $(x_n)_n$ converge vers un certain $x \in A$.
— $\forall x, y \in A, \forall t, u \in [0,1]$, $\|h(x,t)-h(y,u)\| \leq \|h(x,t)-h(y,t)\| + \|h(y,t)-h(y,u)\| \leq$
$\leq k\|x-y\| + k'|t-u|$, donc l'application $h$ est continue sur $A \times [0,1]$.
La continuité de $h$ sur $A \times [0,1]$ permet d'avoir par passage à la limite $n \longrightarrow +\infty$ dans l'égalité $x_n = h(x_n, t_n)$, $x = h(x,t)$, c'est à dire que $t \in T$, ce qui entraine que $T$ est fermée.
7. **La distance de** $x$ **à** $\partial A$ **est strictement positive**
Supposons que $d(x, \partial A) = 0$, alors la caractérisation séquentielle assure l'existence d'une suite $(x_n)_n$ de $\partial A$ convergente vers $x$, or $\partial A$ est fermée, donc $x \in \partial A$, et la condition $\boxed{c}$ montre que $x \neq h(x,t)$, ce qui contredit l'hypothèse $x = h(x,t)$.
8. D'une égalité déjà établie dans 6, on aura $\|x - h(y,u)\| = \|h(x,t) - h(y,u)\| \leq k\|x-y\| + k'|t-u|$ et des inégalités données par hypothèse, on obtient $\|x - h(y,u)\| \leq kr + k'\varepsilon \leq kr + (1-k)r = r$.
9. **L'application** $y \longmapsto h(y,u)$ **admet un point fixe intérieur à** $A$
D'après la question 8, $\forall y \in \overline{B}(x,r) \cap A$, $h(y,u) \in \overline{B}(x,r) \cap A$, donc d'après $\boxed{b}$, l'application
$$h(.,u) : \begin{array}{ccc} \overline{B}(x,r)\cap A & \longrightarrow & \overline{B}(x,r)\cap A \\ y & \longmapsto & h(y,u) \end{array}$$
est contractante, donc d'après le théorème de Picard, elle admet un point fixe $y \in \overline{B}(x,r) \cap A$, c'est à dire $h(y,u) = y$ égalité qui exige d'après $\boxed{c}$, que $y \notin \partial A$, donc $y$ est intérieur à $A$.
10. $T$ **est un ouvert relatif**
Soit $t \in T$, on choisit $\varepsilon$ et $r$ comme précédement, alors d'après 9, $\forall u \in B(t,\varepsilon) \cap [0,1]$, l'application $h(.,u)$ admet un point fixe $y \in \overset{\circ}{A}$, donc $h(y,u) = y$, ce qui assure que $u \in T$, c'est à dire $B(t,\varepsilon) \cap [0,1] \subset T$

et par suite T est un ouvert relatif à $[0,1]$.
**Existence et unicité d'un point fixe de $g$ intérieure à $A$**
T étant non vide majoré par 1, soit $s=\sup(T)$ et supposons que $s<1$, alors la fermétude de T entraine que $s\in T$, et puisque T est un ouvert relatif de $[0,1]$, il existe $s'\in]s,1[$ tel que $[s,s'[\subset T$, ce qui contredit la définition de $s$, donc $s=1\in T$, d'où l'existence de $x\in A$ tel que $x=h(x,1)$, c'est à dire $x=g(x)$.
L'hypothèse $\boxed{c}$ montre que $x\notin\partial A$, donc $x$ est intérieur à $A$.

11. **Existence et unicité d'un point fixe de $f$ intérieure à $A$**
On considère l'application $h: \begin{array}{ccc} A\times[0,1] & \longrightarrow & E \\ (x,t) & \longmapsto & tf(x) \end{array}$, alors l'application $h$ vérifie
$\forall x\in A$, $h(x,1)=f(x)$ et $h(x,0)=0$ et les trois propriétés $\boxed{a}$, $\boxed{b}$ et $\boxed{c}$.
$\boxed{a}$ : f étant contractante, soit $k\in[0,1[$ le rapport de contraction, alors
$\forall x,y\in A$, $\forall t\in[0,1]$ , $\|h(x,t)-h(y,t)\|=|t|\|f(x)-f(y)\|\leq k\|x-y\|$.
$\boxed{b}$ : $f(A)$ étan bornée, soit $k'>0$ un majorant, alors
$\forall x\in A$, $\forall t,u\in[0,1]$, $\|h(x,t)-h(x,u)\|=|t-u|\|f(x)\|\leq k'|t-u|$.
$\boxed{c}$ : $\forall t\in[0,1]$, $\forall x\in\partial A$, $h(x,t)=tf(x)\neq x$.
On a donc f et l'application nulle sont contractantes et homotopes, de plus l'application nulle admet $0\in\overset{\circ}{A}$ comme point fixe, donc d'après la question 10, f possède un unique point fixe intérieur à $A$.

**C-Étude de ceratains opérateurs à noyau**

12. $F$ **est contractante**
$\forall t\in[a,b]$, $\forall y,z\in C([a,b])$, $y(t)\in D$ et $z(t)\in D$, donc
$$|F(y)(t)-F(z)(t)|=\left|\int_a^b K(t,x)\left(f(x,y(x))-f(x,z(x))\right)dx\right|\leq\int_a^b|K(t,x)||f(x,y(x))-f(x,z(x))|dx\leq$$
$$\leq K_0\int_a^b|K(t,x)||y(x)-z(x)|dx\leq K_0\|y-z\|\int_a^b|K(t,x)|dx\leq\alpha K_0\|y-z\|.$$

13. $F$ **admet un point fixe unique intérieure à** $A$
L'inégalité précédente et l'hypothèse $\alpha K_0\in[0,1[$ entraine que $F: A\longrightarrow C([a,b])$ est contractante sur $A$ qui est fermée. de plus F vérifie les hypothèses $\boxed{d}$, $\boxed{e}$ et $\boxed{f}$ de la question 11.
$\boxed{d}$ : Par hypothèse, la fonction nulle est intérieur à $A$.
$\boxed{e}$ : $A$ étant bornée, soit $M>0$ un majorant, alors $\forall\varphi\in A$, $\|F(\varphi)\|\leq\|F(\varphi)-F(0)\|+\|F(0)\|\leq\alpha K_0\|\varphi\|+\|F(0)\|\leq M+\|F(0)\|$, donc $F(A)$ est bornée.
$\boxed{f}$ : Par hypothèse $\forall\varphi\in\partial A$, $\forall\lambda\in[0,1]$, $\varphi\neq\lambda F(\varphi)$.
On conclut par la question 11, que F admet un unique point fixe intérieur à $A$.

**D-Une généralisation**

14. $0\in X$, donc X est non vide.
$X$ **est fermé**
Soit $(x_n)_n$ une suite de X convergente vers $x\in A$, alors $\exists(t_n)_n$ suite de $[0,1]$ tel que $x_n=t_nf(x_n)$.
$[0,1]$ étant compact, donc il existe une sous-suite $(t_{\varphi(n)})_n$ de $[0,1]$ convergente vers $t\in[0,1]$, alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_{\varphi(n)}=t_{\varphi(n)}f(x_{\varphi(n)})$, le passage à la limite $n\longrightarrow+\infty$ en considérant la continuité de f, entraine que $x=tf(x)$, donc $x\in X$, ce qui assure que X est un fermé.

**Définition et continuité de $\mu$**
- Si $\exists x\in A$ tel que $d(x,\partial A)+d(x,X)=0$, alors $d(x,\partial A)=d(x,X)=0$, donc $x\in\overline{\partial A}\cap\overline{X}=\partial A\cap X$, or l'hypothèse $\boxed{i}$ montre que $\partial A\cap X=\emptyset$, donc $\mu$ est bien définie sur $A$.
- Les applications $x\longmapsto d(x,\partial A)$ et $x\longmapsto d(x,X)$ sont continues comme des applications 1−lipchitziènnes, donc $\mu$ est continue sur $A$.
- Si $x\in X$, alors $d(x,X)=0$, donc $\mu(x)=1$.
- Si $x\in\partial A$, alors $d(x,\partial A)=0$, donc $\mu(x)=0$.

15. **Continuité de $g$**
La fonction $g$ est continue sur $A$ comme produit de fonctions continues, et sur $C\setminus A$ comme fonction nulle.
Reste la continuité sur $\partial A$. Soit $x_0\in\partial A$, alors $\displaystyle\lim_{\substack{x\longrightarrow x_0\\ x\in A}} g(x)=\mu(x_0)f(x_0)=0=\lim_{\substack{x\longrightarrow x_0\\ x\in C\setminus\partial A}} g(x)$.

On conclut que $g$ est continue sur $C$.
**Compacité de $\overline{g(C)}$**
$g(C) = g(A \cup (C \setminus A)) \subset g(A) \cup g(C \setminus A) = g(A) \subset [0,1].f(A)$, donc $\overline{g(C)} \subset [0,1].\overline{f(A)}$, or $[0,1].\overline{f(A)}$ est un compact comme image du compact $[0,1] \times \overline{f(A)}$ par l'application continue $(\lambda, x) \longmapsto \lambda.x$, ce qui entraine que $\overline{g(C)}$ est un fermé dans un compact, donc c'est un compact.

16. $f$ **admet un point fixe intérieure à** $A$
- $C$ est une partie convexe fermée et la question précédente montre que $g: \ C \longrightarrow C$ est continue telle que $\overline{g(C)}$ est compact, donc le théorème de Schauder affirme que $g$ admet un point fixe $x \in C$.
- Si $x \notin X$, alors par définition de $X$, et puisque $\mu(x) \in [0,1]$, $\mu(x)f(x) \neq x$, donc $x \notin A$, ce qui exige que $x \in C \setminus A$, et par suite $x = g(x) = 0 \in X$, ce qui contredit $x \notin X$.
- On conclut donc que $x \in X \subset A$, et par suite $\mu(x) = 1$, donc $x = g(x) = \mu(x)f(x) = f(x)$.

**E-Application aux intégrales de Fredholm**

17. **La constante $c_\varphi$ satisfaisant aux inégalités**
Soit $\varphi \in E$. Les fonctions $h, K_t$, $x \longmapsto g(x, \varphi(x))$ et $t \longmapsto \|K_t\|_2$ sont continues sur $[0,1]$, donc avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a : $\forall t, u \in [0,1]$
$$|F(\varphi)(t)| \leq \|h\|_0 + \left(\int_0^1 |K_t(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 |g(x, \varphi(x))|^2 dx\right)^{1/2} = \|h\|_0 + c_\varphi \|K_t\|_2 \leq$$
$$\leq \|h\|_0 + c_\varphi \sup_{s \in [0,1]} \|K_s\|_2. \quad \text{où } c_\varphi = \left(\int_0^1 |g(x, \varphi(x))|^2 dx\right)^{1/2}$$ est indépendante de $t$ et $u$.
Toujours en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :
$$|F(\varphi)(t) - F(\varphi)(u)| \leq |h(t) - h(u)| + \int_0^1 |g(x, \varphi(x))| \left(|K(t,x) - K(u,x)|\right) dx \leq$$
$$\leq |h(t) - h(u)| + c_\varphi \|K_t - K_u\|_2.$$

18. $F$ **est une application de** $E$ **vers** $E$
Soit $t, u \in [0,1]$, les fonctions $h$, $t \longmapsto K_t$ et $\|.\|_2$ sont continues, donc par passage à la limite $t \longrightarrow u$ dans l'inégalité $|F(\varphi)(t) - F(\varphi)(u)| \leq |h(t) - h(u)| + c_\varphi \|K_t - K_u\|_2$, on obtient $F(\varphi)(t) \underset{t \longrightarrow u}{\longrightarrow} F(\varphi)(u)$, ce qui assure la continuité de $F(\varphi)$ et $F$ est donc une application de $E$ vers $E$.

19. **La convergence uniforme de $(\varphi_n)_n$ entraine la convergence simple de $(F(\varphi_n))_n$**
Soit $t \in [0,1]$ et $\varepsilon > 0$.
La convergence de $\varphi_n$ vers $\varphi$ est uniforme, donc simple et par suite $\forall x \in [0,1]$, $\varphi_n(x) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \varphi(x)$ et la continuité de $g$ sur $[0,1] \times \mathbb{R}$ entraine que $g(x, \varphi_n(x)) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} g(x, \varphi(x))$, c'est à dire $\exists N = N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|g(x, \varphi_n(x)) - g(x, \varphi(x))| \leq \varepsilon$, et par suite :
$$|F(\varphi_n)(t) - F(\varphi)(t)| = \left|\int_0^1 K(t,x) \left|g(x, \varphi_n(x)) - g(x, \varphi(x))\right| dx\right| \leq \varepsilon \int_0^1 |K(t,x)| dx,$$ ce qui assure que $F(\varphi_n)$ converge simplement vers $F(\varphi)$ sur $[0,1]$.

20. Soit $\varepsilon > 0$.
- D'une part, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|\varphi_n\|_0 \leq M$, donc $\forall x \in [0,1]$, $|\varphi_n(x)| \leq M$ et l'hypothèse $\boxed{j}$ entraine l'existence de $\mu_M \in L^2$ tel que $|g(x, \varphi_n(x))| \leq \mu_M(x)$ et par suite $c_{\varphi_n} \leq \|\mu_M\|_2 \leq 1 + \|\mu_M\|_2$.
- D'autre part, les fonctions $h$ et $t \longmapsto K_t$ sont continues sur le compact $[0,1]$, donc d'après le théorème de Heine, elles y sont uniformément continues, d'où l'existence de $\delta > 0$ tel que $\forall t, u \in [0,1]$, on a $|t - u| < \delta$ implique $|h(t) - h(u)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\|K_t - K_u\|_2 < \dfrac{\varepsilon}{2(1 + \|\mu_M\|_2)}$.
On conclusion, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, t, u \in [0,1]$, on a l'implication $|t - u| < \delta \Longrightarrow$ $|F(\varphi_n(t)) - F(\varphi_n(u))| \leq |h(t) - h(u)| + c_\varphi \|K_t - K_u\|_2 \leq |h(t) - h(u)| + (1 + \|\mu_M\|_2) \|K_t - K_u\|_2 \leq \varepsilon$.

21. **Continuité de** $F$
Notons $g$ la limite simple de la suite $(F(\varphi_n))_n$ sur $[0,1]$ et soit $\varepsilon > 0$, alors le résultat de la question 20, assure l'existence de $\delta > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t, u \in [0,1]$ $|t - u| < \delta \Longrightarrow |F(\varphi_n)(t) - F(\varphi_n)(u)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ et par passage à la limite $n \longrightarrow +\infty$, on obtient $\forall t, u \in [0,1]$, $|t - u| < \delta \Longrightarrow |g(t) - g(u)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.
Le rappel montre l'existence de $t_1, ..., t_p \in [0,1]$ tel que $[0,1] \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} ]t_i - \delta, t_i + \delta[$.
La convergence simple de $(F(\varphi_n))_n$ vers $g$ sur $[0,1]$ entraine l'existence de $N_1, ..., N_p$ tel que $\forall n \geq N = \max(N_1, ..., N_p)$, $\forall i \in [[1, p]]$ $|F(\varphi_n)(t_i) - g(t_i)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Soit $t \in [0,1]$, alors $\exists j \in [[1,p]]$ tel que $t \in ]t_j - \delta, t_j + \delta[$, donc
$\forall n \geq N$, $|F(\varphi_n)(t) - g(t)| \leq |F(\varphi_n)(t) - F(\varphi_n)(t_j)| + |F(\varphi_n)(t_j) - g(t_j)| + |g(t_j) - g(t)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.
On vient de montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\forall t \in [0,1]$, $|F(\varphi_n)(t) - g(t)| < \varepsilon$.
Soit $\varphi \in A$ et $(\varphi_n)_n$ une suite de $A$ convergente vers $\varphi$ dans E, alors d'après la question 19, $(F(\varphi_n))_n$ converge simplement vers $F(\varphi)$ sur $[0,1]$ et on vient de montrer que $\|F(\varphi_n) - F(\varphi)\|_0 \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc on conclut par la caractérisation séquentielle que F est continue sur $A$.

22. **Extraction d'une sous-suite qui converge simplement de** $(F(\varphi_n))_n$
- On commence par montrer que la suite $(F(\varphi_n))_n$ admet une sous-suite qui converge simplement sur $Q \cap [0,1]$.
- Soit $r_1, r_2, ..., r_n, ..$ la suite des éléments des rationnels de $[0,1]$, la première inégalité dans la question 17, montre que la suite $(F(\varphi_n)(r_1))_n$ est bornée dans $\mathbb{R}$, donc par le théorème de Bolzano-Weistrass, on peut y extraire une sous-suite convergente, qu'on notera $(F(\varphi_{\sigma_1(n)})(r_1))_n$.
- On considère maintenant la suite $(F(\varphi_{\sigma_1(n)})(r_2))_n$ qui est bornée pour les mêmes raisons, donc on y peut extraire une sous-suite convergente $(F(\varphi_{\sigma_2(n)})(r_2))_n$, ainsi la sous-suite $(F(\varphi_{\sigma_2(n)}))_n$ est convergente à la fois en $r_1$ et $r_2$.
- Avec ce procédé, on construit une sous-suite $(F(\varphi_{\sigma_k(n)}))_n$ qui converge aux points $r_1, ..., r_k$, ainsi on peut extraire de $(F(\varphi_n))_n$ une sous-suite convergente en tout point de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.
- On considère la suite $(g_n)_n$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $g_n = F(\varphi_{\sigma_n(n)})$, alors $(g_n)_{n\geq}$ est une suite extraite de $F(\varphi_{\sigma_k(n)})_n$ pour tout $n \geq k$ et par suite $(g_n)_n$ converge aux points $r_k$ $\forall n \geq k$, donc la suite $(g_n)_n$ converge en tout point $r$ de $Q \cap [0,1]$.
Soit $x \in [0,1]$.
**La suite** $(g_n(x))_n$ **est de Cauchy**
En effet soit $\varepsilon > 0$, alors d'après la question 20, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0,1]$, on a
$|t - x| < \delta \Longrightarrow |g_n(x) - g_n(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$, or la densité de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ dans $[0,1]$ entraine l'existence de $r_k \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ tel que $|x - r_k| < \delta$ et par suite
$\forall n, m \in \mathbb{N}^*$, $|g_n(x) - g_m(x)| \leq |g_n(x) - g_n(r_k)| + |g_n(r_k) - g_m(r_k)| + |g_m(r_k) - g_m(x)| <$
$< 2\frac{\varepsilon}{3} + |g_n(r_k) - g_m(r_k)|$.
Mais la suite $(g_n(r_k))_n$ converge, donc elle est de Cauchy, d'où l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|g_n(r_k) - g_m(r_k)| < \frac{\varepsilon}{3}$, donc $\forall n, m \geq N$, $|g_n(x) - g_m(x)| < \varepsilon$.
$\forall x \in [0,1]$, la suite $(g_n(x))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ qui est complet, donc la suite $(g_n)_n$ converge simplement sur $[0,1]$ et c'est une suite extraite de $(F(\varphi_n))_n$.

23. F **admet un point fixe intérieur à** $A$
D'après la première inégalité de la question 17, on obtient $\forall \varphi \in A$, $\|F(\varphi)\|_0 \leq \|h\|_0 + c_\varphi \sup_{s \in [0,1]} \|K_s\|_2 \leq$
$\|h\|_0 + \|\mu\|_2 \sup_{s \in [0,1]} \|K_s\|_2 = M'$.
Soit $C = \overline{B}(0, M')$, alors C est une partie convexe fermée de E et d'après la question 21, $F : A \longrightarrow C$ est continue, de plus ona
$\boxed{g}$ : 0 est intérieur à $A$.
$\boxed{h}$ : $\overline{F(A)}$ est compacte.(d'après la question 22).
$\boxed{i}$ : Pour tout $\varphi \in \partial A$, et tout $\lambda \in [0,1]$, on a $\varphi \neq \lambda F(\varphi)$.(c'est l'hypothèse faite à la fin de la page 5).
Ainsi les hypothèses faites dans la partie **D** sont satisfaites, ce qui entraine que d'après 16, F admet un point fixe untérieur à $A$, donc de norme strictement inférieur à $M$.