Extrait du CNC 2009

Notations

Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à p lignes et q colonnes ; si $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, ${}^tM$ désigne la matrice transposée de M et $\mathrm{rg}\,(M)$ son rang.

Pour tout entier naturel k, $\mathcal{P}_k$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré $\leqslant k$.

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul et $x_0, x_1, \dots, x_n$ des réels **deux à deux distincts** ; on note π le polynôme $\pi = (X - x_0)(X - x_1)\cdots(X - x_n)$.

Enfin, pour tout entier naturel m, on définit l'application

$$f_m : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_m & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & \big(P(x_0), \dots, P(x_n)\big) \end{array}$$

1ère Partie : Étude de l'application f_m

Sot m un entier naturel.

1. Si $R \in \mathcal{P}_n$ est tel que pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $R(x_i) = 0$, montrer que R est le polynôme nul.
2. Vérifier que f_m est une application linéaire.
3. Dans cette question, on suppose que $m \geqslant n + 1$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}\, f_m = \{Q\pi \; ; \; Q \in \mathcal{P}_{m-n-1}\}$; on pourra effectuer une division euclidienne.
   (b) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}\, f_m$ et $\mathcal{P}_n$ sont supplémentaires dans $\mathcal{P}_m$.
   (c) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}\, f_m$ puis en donner une base.
   (d) Déterminer le rang de f_m ; l'application f_m est-elle surjective ?
4. Dans cette question, on suppose que $m \leqslant n$.
   (a) Montrer que f_m est injective.
   (b) Quel est le noyau de f_m ? Quel est son rang ?
   (c) À quelle condition sur les entiers n et m l'application f_m est-elle surjective ?
5. On définit les polynômes $L_0, L_1, \dots, L_n$ par $L_i = \prod\limits_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \dfrac{(X - x_j)}{(x_i - x_j)}$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.
   (a) Pour $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, quel est le degré de L_i ? Vérifier que pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $L_i(x_k) = \delta_{i,k}$ avec $\delta_{i,k} = 1$ si $i = k$ et 0 sinon.
   (b) Calculer $f_n(L_i)$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Que représente la famille $\big(f_n(L_0), f_n(L_1), \dots, f_n(L_n)\big)$ pour l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{n+1}$?
   (c) Montrer que la famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathcal{P}_n$.
   (d) Soit $y = (y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
      i. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_y \in \mathcal{P}_n$ tel que $f_n(P_y) = (y_0, y_1, \dots, y_n)$.
      ii. Exprimer le polynôme P_y en fonction de $L_0, L_1, \dots, L_n$ et $y_0, y_1, \dots, y_n$.

2ème Partie : Approximation polynômiale au sens des moindres carrés

On considère des réels $y_0, y_1, \ldots, y_n$ qui sont respectivement les images des réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ par une fonction φ, et on cherche à déterminer les polynômes $P \in \mathcal{P}_m$ tels que la quantité

$$\Phi_m(P) := \sum_{i=0}^{n} \big(y_i - P(x_i)\big)^2$$

soit minimale, et à préciser la valeur minimale λ_m de la dite quantité.

On parle alors d'approximation polynômiale au sens des moindres carrés de la fonction φ aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$; ce type d'approximation est particulièrement utilisé dans les problèmes d'optimisation et de contrôle de qualité.

A. Étude dans le cas $m \geqslant n+1$

1. Donner un polynôme $Q_0 \in \mathcal{P}_m$ tel que $f_m(Q_0) = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$. Que vaut $\Phi_m(Q_0)$?

2. En déduire la valeur minimale λ_m de $\Phi_m(P)$ lorsque P décrit $\mathcal{P}_m$, et préciser à l'aide de Q_0 et $\operatorname{Ker} f_m$ l'ensemble des polynômes en lesquels cette valeur minimale est atteinte.

B. Étude dans le cas $m \leqslant n$

Dans cette section, on pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,m+1}(\mathbb{R}), \quad b = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que si $M, N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ alors ${}^t(M+N) = {}^tM + {}^tN$ et que, si $M' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $N' \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$, alors ${}^t(M'N') = {}^tN'\,{}^tM'$; p, q et r étant des entiers naturels non nuls.

2. Soit $v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$; on lui associe le polynôme $P_v \in \mathcal{P}_m$ défini par $P_v(x) = \sum_{k=0}^{m} v_k x^k$.

   (a) Calculer le produit Av et l'exprimer à l'aide des valeurs prises par P_v aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

   (b) Montrer alors que si $Av = 0$ alors $v = 0$.

A traiter la suite un jour...