Structures algébriques usuelles

Exercice 1 :

Soit $(G, .)$ un groupe de neutre e et vérifiant

$$\forall x \in G,\ x^2 = e$$

Montrer que G est abélien.

Exercice 2 :

Montrer que

1) H est un sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$ où

$$H = \{a + b\omega/\ a, b \in \mathbb{Z}\}\ et\ \omega \in \mathbb{C}\ fixé$$

2) H est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ où

$$H = \{\omega^m/\ m \in \mathbb{Z}\}\ et\ \omega \in \mathbb{C}^*\ fixé$$

3) H est un sous-groupe de $(S_E, \circ)$ où

$$H = \{f \in S_E/\ f(a) = a\}.\ a \in E\ fixé,\ et\ E\ en\ ensemble\ non\ vide$$

Exercice 3 :

Soit $(G, \times)$ un groupe. Montrer que

1) $aHa^{-1} = \{aha^{-1}/\ h \in H\}$ est un sous-groupe de $(G, \times)$ où

$$H\ un\ sous-groupe\ de\ G,\ et\ a \in G\ fixé$$

2) $\mathcal{C}$ est un sous-groupe de $(G, \times)$ où

$$\mathcal{C} = \{x \in G/\ \forall g \in G,\ x \times g = g \times x\}$$

*$\mathcal{C}$ s'appelle le **centre** de G*

Exercice 4 :

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, $f_{a,b} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\,;\ z \longmapsto az + b$.
Notons $H = \{f_{a,b}\ /\ (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}\}$. Montrer $(H, \circ)$ est un groupe.

Exercice 5 :
Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe $(G,.)$.
Montrer que

$$(H \cup K \; est \; un \; sous-groupe \; de \; G) \Leftrightarrow \; (H \subset K \; ou \; K \subset H)$$

Exercice 6 : (Les sous-gropues de $(\mathbb{Z},+)$)
Notation : $n\mathbb{Z} = \{nk \; / \; k \in \mathbb{Z}\}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On se propose de montrer que les sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$ sont les $n\mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit :

$$(H \; sous-groupe \; de \; \mathbb{Z}) \; \Leftrightarrow \; (H \; est \; de \; la \; forme \; n\mathbb{Z}, \; où \; n \in \mathbb{N})$$

I) Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$.

II) *Réciproquement.* Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$.

1) Vérifier que si $H = \{0\}$, alors il est de la forme voulue.

2) Supposons que $H \neq \{0\}$

i) Justifier que $H^+ = \{h \in H \; / \; h \succ 0\}$ possède un plus petit élément. (Notons-le a).
On vérifiera que $H = a\mathbb{Z}$.

ii) Montrer que $a\mathbb{Z} \subset H$.

iii) En effectuant la division euclidienne d'un élément de H par a , montrer que $H \subset a\mathbb{Z}$.
H est ainsi de la forme voulue.

III) Montrer que pour tout sous-groupe H de $(\mathbb{Z},+)$, il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $H = n\mathbb{Z}$

Exercice 7 :
Soit $(A,+,\times)$ un anneau.
Un élément a de A est dit ***idempotent*** *si et seulement si $x^2 = x$;*
c-à-d $x \times x = x$.

1) Montrer que si x et y sont idempotents et commutent, alors $x \times y$ est aussi idempotent.

2) Montrer que si x est idempotent et inversible, alors x^{-1} est idempotent.

Exercice 8 :
Soit $(A,+,\times)$ un anneau de neutres 0 et 1.
Définition : Un élément a de A est dit *nilpotent* si et seulement il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$.
Soient $a, b \in \; A$.

1) Supposons que a et b nilpotents et commutent.

i) Montrer que ab est nilpotent.

ii) Montrer que $(a+b)$ est nilpotent.

2) Montrer que
$$(ab\ nilpotent) \Rightarrow (ba\ nilpotent)$$

3) Montrer que
$$(a\ nilpotent) \Rightarrow ((1-a)\ inversible)$$

Préciser l'inverse $(1-a)^{-1}$ en fonction des puissances de a.

Exercice 9 : (Anneau de Boole)
Soit $(A,+,\times)$ un anneau de Boole ; c-à-d que c'est un anneau vérifiant :
$$\forall x \in A,\ x^2 = x$$

1) a) Montrer que
$$\forall x, y \in A,\ xy + yx = 0$$

b) En déduire que

i) $\forall x \in A,\ 2x = 0$

ii) L'anneau A est commutatif.

2) Considérons la relation binaire $\preceq$ définie sur A par
$$x \preceq y \Leftrightarrow yx = x$$

Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre.

3) a) Montrer que
$$\forall x, y \in A,\ xy(x+y) = 0$$

b) En déduire que si l'anneau de Boole A est en plus intègre, alors il ne contiendra que deux éléments.

Exercice 10 : (Anneau de Gauss)
Notons $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi\ /\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1) Montrer que $(\mathbb{Z}[i],+,\times)$ est un anneau commutatif.
Cet anneau s'appelle l'anneau de Gauss.

2) Montrer que le groupe des éléments inversibles de l'anneau de Gauss et $\{1,-1,i,-i\}$.
Indice : vous pouvez utiliser que si $z, z' \in \mathbb{C}$, alors $|z \times z'|^2 = |z|^2 \times |z'|^2$

Exercice 11 :
Soit $(A,+,\times)$ un anneau non nul, *commutatif et fini.*
Montrer que
$$A\ est\ intègre \Leftrightarrow A\ est\ un\ corps$$

Indice : On admet qu'une application injective d'un ensemble fini vers lui-même est bijective.