

CONCOURS COMMUN 2004
DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES
Epreuve de Mathématiques
(toutes filières)

ANALYSE

PREMIERE PARTIE

1. La fonction $x \mapsto \frac{2-x}{(1-x)^2}$ est continue sur I et admet donc des primitives sur I .

Pour $x \in]-\infty, 1[$, $\frac{2-x}{(1-x)^2} = \frac{1+1-x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}$. Une primitive de a sur I est donc la fonction définie par :

$$\forall x \in I, A(x) = -\ln(1-x) + \frac{1}{1-x}.$$

2. Soit g une fonction dérivable sur I .

$$\begin{aligned} g \text{ solution de (E) sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in I, g'(x) - a(x)g(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in I, e^{-A(x)}g'(x) - a(x)e^{-A(x)}g(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I, (e^{-A}g)'(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in I, e^{-A(x)}g(x) = C \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in I, g(x) = Ce^{A(x)} \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in I, g(x) = C \frac{1}{1-x} e^{1/(1-x)}. \end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur (I) sont les fonctions de la forme $x \mapsto C \frac{1}{1-x} e^{1/(1-x)}$, $C \in \mathbb{R}$.

3. Quand x tend vers 0, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x} e^{1/(1-x)} \\ &= (1+x+x^2+x^3+o(x^3))e^{1+x+x^2+x^3+o(x^3)} = e(1+x+x^2+x^3+o(x^3))e^{x+x^2+x^3+o(x^3)} \\ &= e(1+x+x^2+x^3)(1+(x+x^2+x^3) + \frac{1}{2}(x+x^2)^2 + \frac{1}{6}(x^3)^3 + o(x^3)) \\ &= e(1+x+x^2+x^3)(1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{13}{6}x^3+o(x^3)) \\ &= e + 2ex + \frac{7e}{2}x^2 + \frac{17e}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} e + 2ex + \frac{7e}{2}x^2 + \frac{17e}{3}x^3 + o(x^3).$$

DEUXIEME PARTIE

4. f est de classe C^∞ sur I en tant que produit de fonctions de classe C^∞ sur I .

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons alors $(\mathcal{P}_n)$ la propriété : « il existe un polynôme P_n tel que, pour tout réel x de I , $f^{(n)}(x) = P_n \left(\frac{1}{1-x} \right) e^{1/(1-x)}$ ». Montrons cette propriété par récurrence.

- Vérifions tout d'abord que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie. Pour tout réel x de I , on a $f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{1-x} e^{1/(1-x)}$. $(\mathcal{P}_0)$ est donc vérifiée en prenant $P_0 = X$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ soit vérifiée et montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ l'est. En dérivant $f^{(n)}$ une fois de plus, on obtient pour tout réel x de I :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(P_n \left(\frac{1}{1-x} \right) e^{1/(1-x)} \right)'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} P_n' \left(\frac{1}{1-x} \right) e^{1/(1-x)} + P_n \left(\frac{1}{1-x} \right) \frac{1}{(1-x)^2} e^{1/(1-x)} \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \left(P_n' \left(\frac{1}{1-x} \right) + P_n \left(\frac{1}{1-x} \right) \right) e^{1/(1-x)}. \end{aligned}$$

Posons alors, $P_{n+1} = X^2(P_n' + P_n)$. P_{n+1} est un polynôme tel que, pour tout réel x de I , $f^{(n+1)}(x) = P_{n+1} \left(\frac{1}{1-x} \right) e^{1/(1-x)}$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{P}_n) \Rightarrow (\mathcal{P}_{n+1})$.

On a montré par récurrence que la propriété $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout naturel n .

Au passage, on a obtenu une relation vérifiée par la suite de polynômes (P_n)

$$P_0 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = X^2(P_n' + P_n).$$

5. $P_0 = X$. $P_1 = X^2(P_0' + P_0) = X^3 + X^2$. $P_2 = X^2(P_1' + P_1) = X^2(3X^2 + 2X + X^3 + X^2) = X^5 + 3X^4 + 2X^3$. $P_3 = X^2(P_2' + P_2) = X^2(5X^4 + 12X^3 + 6X^2 + X^5 + 3X^4 + 2X^3) = X^7 + 8X^6 + 14X^5 + 6X^4$.

$$P_0 = X, P_1 = X^3 + X^2, P_2 = X^5 + 3X^4 + 2X^3 \text{ et } P_3 = X^7 + 8X^6 + 14X^5 + 6X^4.$$

6. Soit n un entier naturel non nul.

Puisque f est l'une des solutions de l'équation (E) sur I , pour tout réel x de I , on a $(1-x)^2 f'(x) = (2-x)f(x)$. Dérivons n fois cette égalité. La formule de LEIBNIZ fournit pour tout réel x de I :

$$(1-x)^2 f^{(n+1)}(x) - 2n(1-x)f^{(n)}(x) + 2 \frac{n(n-1)}{2} f^{(n-1)}(x) = (2-x)f^{(n)}(x) - n f^{(n-1)}(x),$$

puis,

$$(1-x)^2 f^{(n+1)}(x) = (-(2n+1)x + 2n+2)f^{(n)}(x) - n^2 f^{(n-1)}(x),$$

ou enfin, après division des deux membres par $(1-x)^2$, puis simplification par le réel non nul $e^{1/(1-x)}$,

$$P_{n+1} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{-(2n+1)x + 2n+2}{(1-x)^2} P_n \left(\frac{1}{1-x} \right) - \frac{n^2}{(1-x)^2} P_{n-1} \left(\frac{1}{1-x} \right) (*).$$

Maintenant, en posant $y = \frac{1}{1-x}$,

$$\begin{aligned}
\frac{-(2n+1)x+2n+2}{(1-x)^2} &= (2n+1)\frac{-x}{(1-x)^2} + (2n+2)\frac{1}{(1-x)^2} \\
&= (2n+1)\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2}\right) + (2n+2)\frac{1}{(1-x)^2} \\
&= (2n+1)(y-y^2) + (2n+2)y^2 = (2n+1)y + y^2.
\end{aligned}$$

Enfin, quand x décrit $] -\infty, 1[$, y décrit $]0, +\infty[$. (*) s'écrit donc

$$\forall y > 0, P_{n+1}(y) = ((2n+1)y + y^2)P_n(y) - n^2y^2P_{n-1}(y).$$

Les deux polynômes ci-dessus coïncident en une infinité de valeurs de la variable. Ils sont donc égaux. On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1}(X) = ((2n+1)X + X^2)P_n(X) - n^2X^2P_{n-1}(X) \quad (**).$$

TROISIEME PARTIE

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $a_n = f^{(n)}(0) = eP_n(1)$.

On multiplie donc les deux membres de l'égalité (**) par e , puis on évalue en 1. On obtient : $a_{n+1} = (2n+2)a_n - n^2a_{n-1}$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = (2n+2)a_n - n^2a_{n-1}.$$

8. a) On sait que les coefficients du développement limité obtenu à la question 3. sont respectivement $f(0)$, $f'(0)$, $\frac{f''(0)}{2}$ et $\frac{f^{(3)}(0)}{6}$. Donc $a_0 = e$, $a_1 = 2e$, $a_2 = 7e$ et $a_3 = 34e$. Enfin, $a_4 = 8a_3 - 9a_2 = 209e$.

b) Quand x tend vers 0, la formule de TAYLOR-YOUNG fournit

$$f(x) = e + 2ex + \frac{7e}{2}x^2 + \frac{17e}{3}x^3 + \frac{209e}{24}x^4 + o(x^4).$$

9. Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après la formule de TAYLOR-LAPLACE,

$$e = \sum_{i=0}^p \frac{1}{i!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} e^t dt = u_p + \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} e^t dt.$$

Or,

$$\left| \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} e^t dt \right| = \frac{1}{p!} \int_0^1 (1-t)^p e^t dt \leq \frac{e}{p!} \int_0^1 (1-t)^p dt = \frac{e}{(p+1)!}.$$

Comme $\frac{e}{(p+1)!}$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$, il en est de même de $\int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} e^t dt$. On a ainsi montré que quand p tend vers $+\infty$, u_p tend vers e .

10. a) Soit $p \in \mathbb{N}$. $S_p(0) = \sum_{i=0}^p \frac{i!}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^p \frac{1}{i!} = u_p$. Ensuite, pour $p \geq 1$,

$$\begin{aligned}
S_p(1) &= \sum_{i=0}^p \frac{(i+1)!}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^p \frac{i+1}{i!} = \sum_{i=0}^p \frac{i}{i!} + \sum_{i=0}^p \frac{1}{i!} = \sum_{i=1}^p \frac{1}{(i-1)!} + \sum_{i=0}^p \frac{1}{i!} = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{i!} + \sum_{i=0}^p \frac{1}{i!} \\
&= u_{p-1} + u_p
\end{aligned}$$

Donc

$$\forall p \in \mathbb{N}, S_p(0) = u_p \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}^*, S_p(1) = u_p + u_{p-1}.$$

b) Quand p tend vers $+\infty$, $S_p(0)$ tend vers e et $S_p(1)$ tend vers $e + e = 2e$.

11. Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

$$\begin{aligned} S_p(n+1) - (2n+2)S_p(n) + n^2S_p(n-1) + S_p(n) &= \sum_{i=0}^p \frac{(n+1+i)! - (2n+1)(n+i)! + n^2(n-1+i)!}{(i!)^2} \\ &= \sum_{i=0}^p \frac{(n-1+i)!((n+1+i)(n+i) - (2n+1)(n+i) + n^2)}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^p \frac{(n-1+i)! \times i^2}{(i!)^2} \\ &= \sum_{i=1}^p \frac{(n+(i-1))!}{((i-1)!)^2} = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(n+i)!}{(i!)^2} = S_{p-1}(n) \end{aligned}$$

Donc

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, S_p(n+1) - (2n+2)S_p(n) + n^2S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n).$$

12. Montrons par récurrence sur n , que pour tout naturel n , la suite $p \mapsto S_p(n)$ converge.

- Pour $n = 0$ et $n = 1$, on sait, d'après 10., que les suites $p \mapsto S_p(0)$ et $p \mapsto S_p(1)$ convergent.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que les deux suites $p \mapsto S_p(n-1)$ et $p \mapsto S_p(n)$ convergent. Alors, puisque pour tout naturel non nul p , on a

$$S_p(n+1) = (2n+2)S_p(n) - n^2S_p(n-1) + S_{p-1}(n) - S_p(n),$$

on en déduit que la suite $p \mapsto S_p(n+1)$ converge.

On a montré par récurrence que pour tout naturel n , la suite $p \mapsto S_p(n)$ converge.

13. Notons ℓ_n la limite de la suite $p \mapsto S_p(n)$. On fait tendre p vers $+\infty$ dans l'égalité de la question 11.. On obtient pour tout naturel non nul n , $\ell_{n+1} = (2n+2)\ell_n - n^2\ell_{n-1}$.

Ainsi, $\ell_0 = e = a_0$ et $\ell_1 = 2e = a_1$, puis si pour un entier naturel non nul n , $\ell_{n-1} = a_{n-1}$ et $\ell_n = a_n$, alors

$$\ell_{n+1} = (2n+2)\ell_n - n^2\ell_{n-1} = (2n+2)a_n - n^2a_{n-1} = a_{n+1} \text{ (d'après 7.)}.$$

On a montré par récurrence que, pour tout naturel n , $\ell_n = a_n$, et donc que

$$a_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^p \frac{(n+i)!}{(i!)^2}.$$

$$\text{Enfin, } \frac{(n+i)!}{(i!)^2} = \frac{(n+i)!}{n!i!} \frac{n!}{i!} = n! \binom{n+i}{i} \frac{1}{i!}, \text{ et on a aussi } a_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} n! \sum_{i=0}^p \binom{n+i}{n} \frac{1}{i!}.$$

FIN

