Extrait

Premier problème

Soit p un entier naturel non nul ; on note w_p le nombre complexe défini par $w_p = e^{\frac{2i\pi}{p}}$.
Par définition, la transformation de Fourier discrète de $\mathbb{C}^p$ est l'application $\Phi_p : \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C}^p$ qui à tout vecteur $x = (x_0, ..., x_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ associe le vecteur $y = (y_0, ..., y_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ dont les composantes $y_0, ..., y_{p-1}$ sont définies , pour tout $k \in \{0, ..., p-1\}$, par

$$y_k = P_x(w_p^k),$$

où P_x est le polynôme à coefficients complexes défini par $P_x = \sum_{j=0}^{p-1} x_j X^j$.

1ère partie
Quelques propriétés de Φ_p

1. Soit $x = (x_0, ..., x_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$.
   (a) Montrer que $\Phi_p(x) = 0$ si et seulement si le polynôme P_x est nul.
   (b) Montrer que Φ_p est un automorphisme de $\mathbb{C}^p$.
2. On note $\mathscr{B} = (e_0, e_1, ..., e_{p-1})$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^p$ et M la matrice de l'endomorphisme Φ_p dans cette base ; on écrit $M = (m_{ij})_{0 \leq i,j \leq p-1}$.
   (a) Préciser, pour tout $(i, j) \in \{0, ..., p-1\}^2$, l'expression du coefficient m_{ij}.
   (b) Retrouver le fait que l'endomorphisme Φ_p est un automorphisme de $\mathbb{C}^p$.
3. Soit $x = (x_0, ..., x_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$; on note $\Phi_p(x) = (y_0, ..., y_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$.
   (a) $x = (x_0, ..., x_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$, préciser selon les cas la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{p-1} w_p^{(i-j)k}$.
   (b) Montrer que $\sum_{k=0}^{p-1} |y_k|^2 = p \sum_{k=0}^{p-1} |x_k|^2$.
4. On note $\overline{M}$ la matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ dont le coefficient d'indice (i, j) est égal au conjugué $\overline{m_{i,j}}$ du complexe $m_{i,j}$, pour tout $(i, j) \in \{0, ..., p-1\}^2$.
   (a) Calculer le produit matriciel $\overline{M}M$.
   (b) En déduire l'expression de l'inverse de la matrice M.

Fin extrait