# Correction :

1) voir le cours.
2) $\dim(F) = \dim(G) \Leftrightarrow F = G$
3) **A**) et **B**)

   $K_p \subset K_{p+1}$ : en effet :

   $$x \in K_p \Rightarrow u^p(x) = 0$$
   $$\Rightarrow u\left(u^p(x)\right) = 0$$
   $$\Rightarrow u^{p+1}(x) = 0$$
   $$\Rightarrow x \in K_{p+1}$$

   $I_{p+1} \subset I_p$ : en effet :

   $$x \in I_{p+1} = \mathrm{Im}(u^{p+1}) \Rightarrow \exists t \in E / x = u^{p+1}(t)$$
   $$\Rightarrow x = u^p\left(u(t)\right)$$
   $$\Rightarrow x \in \mathrm{Im}(u^p) = I_p$$

   **C**) $K_p = K_{p+n}$ *et* $I_p = I_{p+n}$ (ça se montre par récurrence sur n$\in \mathbb{N}$)
4) **A**) Supposons u injectif, alors u est bijectif car E est de dimension finie.

   D'où $u^p$ est aussi bijectif ( composée de deux bijections ).

   Alors $u^p$ est à la fois injectif et surjectif.

   **B**) $K_p = \{0\}\, car\, u^p$ *injectif et* $I_p = E$ *car* $u^p$ *surjectif*.
5) **a**) Raisonnons par l'absurde, et supposons que :

   $\forall p \in \mathbb{N},\ K_p \subset K_{p+1}\ et\, K_p \neq K_{p+1}$ .

   Notons $n_p = \dim(K_p)$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}$ .

   Alors $\forall p \in \mathbb{N}, \dim(K_p) \prec \dim(K_{p+1})$ , càd $\forall p \in \mathbb{N}, n_p \prec n_{p+1}$

   Ainsi, la suite $\left(n_p\right)_p$ est à <u>valeurs dans</u> $\mathbb{N}$ , et est <u>strictement</u> croissante.

   Alors $\left(n_p\right)_p$ ne peut pas etre majorée, ce qui est absurde car elle est majorée par dim(E).

   D'où la conclusion.

   **b**) $n_0 = \dim(K_0)$ *et* $K_0 = \ker(\overbrace{u^0}^{=I_E}) = \ker(I_E) = \{0\}$

   $\Rightarrow n_0 = 0.$

   **c**) *Pour tout* $p \in [\![0, r-1]\!]$, $n_p \prec n_{p+1}$ *car* $K_r$ *est inclus strictement dans* $K_{r+1}$ .

   **d**) Si $m, n \in \mathbb{N}$ , alors : $m \prec n \Leftrightarrow m+1 \leq n$ .

   **e**) $$On\ a \begin{cases} n_0 \prec n_1 \\ n_1 \prec n_2 \\ \quad \cdots \\ n_{r-1} \prec n_r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_0 + 1 \leq n_1 \\ n_1 + 1 \leq n_2 \\ \quad \cdots \\ n_{r-1} + 1 \leq n_r \end{cases},$$

   *en sommant et en simplifiant, on obtient* $: n_0 + r \leq n_r$ .

$Or\ n_0 = 0,\ alors\ r \le n_r \le \dim(E) = n.$

**f)** $I_r = I_{r+1},\ en\ effet:$

Pensons au fameux théorème du rang :

On a :

$$\begin{cases} \dim(E) = \dim(\ker(u^p)) + \dim(\operatorname{Im}(u^p)) \\ \dim(E) = \dim(\ker(u^{p+1})) + \dim(\operatorname{Im}(u^{p+1})) \end{cases}$$

$Or\ \dim(\ker(u^{p+1})) = \dim(\ker(u^p))$

$Alors\ \dim(\operatorname{Im}(u^p)) = \dim(\operatorname{Im}(u^{p+1}))$ ; $càd\ \dim(I_p) = \dim(I_{p+1})$

$Et\ puisque\ I_{p+1} \subset I_p$ , $alors\ I_{p+1} = I_p$ .

**g)** $\forall p \in \mathbb{N}, K_r = K_{r+p},\ en\ effet:$

Raisonnons par récurrence sur p :

Pour p=0, c'est clair ( $K_r = K_{r+0}$ ).

Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons que $K_r = K_{r+p}$ , et montrons que $K_r = K_{r+p+1}$ :

Pour l'inclusion : $K_r \subset K_{r+p+1}$ :

On a $K_r = K_{r+p}\ et\ K_{r+p} \subset K_{r+p+1}\ d'après\ 1)$

$D'où\ K_r \subset K_{r+p+1}$ .

Pour l'inclusion : $K_{r+p+1} \subset K_r$ :

On a :

$$\begin{aligned} x \in K_{r+p+1} &\Rightarrow u^{r+p+1}(x) = 0 \\ &\Rightarrow u^{r+1}\left(u^p(x)\right) = 0 \\ &\Rightarrow u^r\left(u^p(x)\right) = 0\ (car\ K_r = K_{r+1}) \\ &\Rightarrow u^{r+p}(x) = 0 \\ &\Rightarrow x \in K_{r+p} \end{aligned}$$

**h)** Pour $I_r = I_{r+p}$ : on utilise comme plus-haut théorèmes du rang, sachant que $K_r = K_{r+p}$ .

**i)** $K_r \cap I_r = \{0\}$ , en effet :

$$\begin{aligned} x \in K_r \cap I_r &\Rightarrow \begin{cases} u^r(x) = 0 \\ \exists t \in E / x = u^r(t) \end{cases} \\ &\Rightarrow u^r(u^r(t)) = 0 \\ &\Rightarrow u^{2r}(t) = 0 \\ &\Rightarrow t \in K_{2r} \\ &\Rightarrow t \in K_r\ (car\ K_r = K_{r+r}\ d'après\ g)) \\ &\Rightarrow u^r(t) = 0 \\ &\Rightarrow x = 0\ (car\ x = u^r(t)) \end{aligned}$$

**j)** On a $K_r \cap I_r = \{0\}$ , alors les deus sous-espaces vectoriels $K_r\ et\ I_r$ sont en somme directe.

d'où $\dim\left(K_r \oplus I_r\right) = \dim\left(K_r\right) + \dim\left(I_r\right) = \dim(E)\ d'après\ le\ théorème\ du\ rang.$

Ce qui permet de conclure que $E = K_r \oplus I_r$ .

Fin et à la prochaine ☺