Ce qui est marqué en jaune est corrigé à présent.
Je corrigerai le reste après.

Déterminant

Exercice 1

En utilisant des opérations élémentaires sur les lignes, montrer que les déterminants suivants sont nuls :

1) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$

2) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{vmatrix}$; où $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$

3) $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1-x & 2-x & 3-x \\ 2-x & 3-x & 4-x \\ 3-x & 4-x & 5-x \end{vmatrix}$

Exercice 2

En utilisant des opérations élémentaires sur les lignes, calculer les déterminants suivants, et donner-les sous la forme la plus factorisée possible :

1) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$

2) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}$

3) $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & sin(a) & cos(a) \\ 1 & sin(b) & cos(b) \\ 1 & sin(c) & cos(c) \end{vmatrix}$

4) $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & cos(a) & cos(2a) \\ 1 & cos(b) & cos(2b) \\ 1 & cos(c) & cos(2c) \end{vmatrix}$

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, calculer $det(A_x)$ et déterminer les valeurs de x pour lesquelles la matrice A_x est inversible.

Vous pouvez utiliser des opérations élémentaires sur les lignes.

1) $A_x = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$

2) $A_x = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$

3) $A_x = \begin{pmatrix} 0 & x & x \\ x & 0 & x \\ x & x & 0 \end{pmatrix}$

4) $A_x = \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix}$

5) $A_x = \begin{pmatrix} x & 2 & 3 & 4 \\ 2 & x & 4 & 3 \\ 3 & 4 & x & 2 \\ 4 & 3 & 2 & x \end{pmatrix}$

Exercice 4

Soit n un entier naturel impair.

1) Déterminer les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = -I_n$.

2) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice anti-symétrique (c-à-d vérifiant ${}^tA = -A$). Montrer que A n'est pas inversible.

Exercice 5

1) Notons $F = (P_1, P_2, P_3)$ où $\begin{cases} P_1 & = & 2 + 3X - X^2 \\ P_2 & = & 1 + X + X^2 \\ P_3 & = & a - X + aX^2 \end{cases}$

Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la famille F est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2) Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 4x + ay + 6z, 7x + 8y + 9z)$$

Déterminer les valeurs de a pour lesquelles f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6

Considérons la fonction f définie par le déterminant d'ordre $n \geq 2$ suivant

$$\forall x \in \mathbb{C},\ f(x) = \begin{vmatrix} a+x & c+x & \dots & c+x \\ b+x & a+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c+x \\ b+x & \dots & b+x & a+x \end{vmatrix}$$

Montrer que f est une fonction polynomiale de degré ≤ 1.

<u>Indice :</u> *Vous pouvez effectuer des opérations élémentaires sur les colonnes (ou lignes), puis développer le déterminant suivant l'une de ses lignes (ou colonnes).*

Exercice 7 (*Déterminant de* ***Vandermonde***)(1735-1796 Paris)
Soit $n \succeq 2$. Soient $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{C}$. On note :

$$V(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On se propose de montrer que $V(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{1 \preceq i \prec j \preceq n} (x_j - x_i)$

(*Résultat à retenir !*).
On raissonera par récurrence sur $n \geq 2$.

A) Initialisation :
Vérifier que la propriété est vraie pour $n = 2$.

B) Hérédité : Soit maintenant $n \succeq 3$. Supposons que la propriété est vraie pour $(n-1)$, et montrons qu'elle est vraie pour n.
Soient alors $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{C}$.

1) Méthode 1 :

a) Par des opérations élémentaires sur les lignes, montrer que

$$V(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) \right) V(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$$

b) Conclure.

2) Méthode 2 : Notons $P(X) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & \dots & x_{n-1} & X \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & X^{n-1} \end{vmatrix}$

a) Vérifier que l'égalité voulue est vraie si $x_1, x_2, ..., x_n$ ne sont pas distincts deux à deux.

b) Supposons maintenant qu'ils sont distincts deux à deux.

i) Justifier que $P(X) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.
Quel est son coéfficient en X^{n-1} ?

ii) Préciser des racines évidentes de P(X).

iii) Justifier la relation

$$P(X) = V(x_1, x_2, ..., x_{n-1})(X - x_1)(X - x_2)...(X - x_{n-1})$$

iv) Conclure.

Déterminant

Exercice 1

En utilisant des opérations élémentaires sur les lignes, montrer que les déterminants suivants sont nuls :

1) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$

2) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{vmatrix}$; où $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$

3) $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1-x & 2-x & 3-x \\ 2-x & 3-x & 4-x \\ 3-x & 4-x & 5-x \end{vmatrix}$

Solution

1) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$= 0$ car $L_3 = (a+b+c) L_1$

2) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1+j+j^2 & 1+j+j^2 & 1+j+j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{vmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{vmatrix}$$

$= 0 \quad (\text{car } L_1 = 0)$

3) $$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1-x & 2-x & 3-x \\ 2-x & 3-x & 4-x \\ 3-x & 4-x & 5-x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-x & 2-x & 3-x \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$= 0 \quad (\text{car } L_3 = 2L_2)$

$\boxed{\text{Fin Ex 1}}$

Exercice 2

En utilisant des opérations élémentaires sur les lignes, calculer les déterminants suivants, et donner-les sous la forme la plus factorisée possible :

1) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$

2) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}$

3) $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & sin(a) & cos(a) \\ 1 & sin(b) & cos(b) \\ 1 & sin(c) & cos(c) \end{vmatrix}$

4) $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & cos(a) & cos(2a) \\ 1 & cos(b) & cos(2b) \\ 1 & cos(c) & cos(2c) \end{vmatrix}$

Solution

1) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a+2b & a+2b & a+2b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$$

$$= (a+2b) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+2b) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - bL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - bL_1 \end{matrix}$$

$$= \boxed{(a+2b)(a-b)^2}$$

(déterminant triangulaire, c'est le produit des coéfficients diagonaux)

2) $$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ (c-a) & b(c-a) & (c-a)(c+a) \\ (c-b) & a(c-b) & (c-b)(c+b) \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$= (c-a)(c-b) \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ 1 & b & c+a \\ 1 & a & c+b \end{vmatrix} = (c-a)(c-b) \begin{vmatrix} 1 & a & c+b \\ 1 & b & c+a \\ a+b & ab & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$

$$= (c-a)(c-b) \begin{vmatrix} 1 & a & c+b \\ 0 & b-a & a-b \\ 0 & -a^2 & (a^2+b^2)-(a+b)(c+b) \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (a+b)L_1 \end{matrix}$$

$$= (c-a)(c-b)(b-a) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -a^2 & (a^2+b^2)-(a+b)(c+b) \end{vmatrix}}_{= -(ab+bc+ca)}$$

Enfin : $\boxed{\Delta = (c-a)(c-b)(b-a)(ab+bc+ca)}$

3) $$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & sin(a) & cos(a) \\ 1 & sin(b) & cos(b) \\ 1 & sin(c) & cos(c) \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 1 & \sin b & \cos b \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 0 & \sin b - \sin a & \cos b - \cos a \\ 0 & \sin c - \sin a & \cos c - \cos a \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\Delta = (\sin b - \sin a)(\cos c - \cos a) - (\sin c - \sin a)(\cos b - \cos a)$$

etona :
$$\begin{cases} \sin b - \sin a = 2 \sin \frac{b-a}{2} \cdot \cos\left(\frac{b+a}{2}\right) \\ \sin c - \sin a = 2 \sin \frac{c-a}{2} \cdot \cos \frac{c+a}{2} \\ \cos b - \cos a = -2 \sin \frac{b-a}{2} \cdot \sin\left(\frac{b+a}{2}\right) \\ \cos c - \cos a = -2 \sin \frac{c-a}{2} \cdot \sin \frac{c+a}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta = -4 \sin \frac{b-a}{2} \cos \frac{b+a}{2} \sin \frac{c-a}{2} \sin \frac{c+a}{2} + 4 \sin \frac{c-a}{2} \cos \frac{c+a}{2} \sin \frac{b-a}{2} \sin \frac{b+a}{2}$$

$$= -4 \sin \frac{b-a}{2} \sin \frac{c-a}{2} \underbrace{\left(\cos \frac{b+a}{2} \sin \frac{c+a}{2} + \cos \frac{c+a}{2} \sin \frac{b+a}{2}\right)}_{= \sin\left(\frac{b+a}{2} + \frac{c+a}{2}\right) = \sin\left(\frac{b+c+2a}{2}\right)}$$

Enfin : $\boxed{\Delta = -4 \sin \frac{b-a}{2} \sin \frac{c-a}{2} \cdot \sin\left(\frac{b+c+2a}{2}\right)}$

$$4)\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos(2a) \\ 1 & \cos b & \cos(2b) \\ 1 & \cos c & \cos(2c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos(2a) \\ 0 & \cos b - \cos a & \cos(2b) - \cos(2a) \\ 0 & \cos c - \cos a & \cos(2c) - \cos(2a) \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

Et avec $\begin{cases} \cos(2b) - \cos(2a) = 2\cos^2 b - 1 - (2\cos^2 a - 1) = 2(\cos b - \cos a)(\cos b + \cos a) \\ \cos 2c - \cos(2a) \overset{\text{Idem}}{=\!=} 2(\cos c - \cos a)(\cos c + \cos a) \end{cases}$

On aura : $$\Delta = \begin{vmatrix} \cos b - \cos a & 2(\cos b - \cos a)(\cos b + \cos a) \\ \cos c - \cos a & 2(\cos c - \cos a)(\cos c + \cos a) \end{vmatrix}$$

$$= 2(\cos b - \cos a)(\cos c - \cos a) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \cos b + \cos a \\ 1 & \cos c + \cos a \end{vmatrix}}_{=(\cos c - \cos b)}$$

Enfin : $$\boxed{\Delta = 2(\cos b - \cos a)(\cos c - \cos a)(\cos c - \cos b)}$$

Fin Ex 2

Exercice 4

Soit n un entier naturel impair.

1) Déterminer les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = -I_n$.

2) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice anti-symétrique (c-à-d vérifiant ${}^tA = -A$). Montrer que A n'est pas inversible.

---

1) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$.

Alors $\det(A^2) = \det(-I_n)$

$\Rightarrow \quad (\det(A))^2 = (-1)^n \quad (\det(\lambda I_n) = \lambda^n)$

$\Rightarrow \quad (\det(A))^2 = -1$ (car n impaire)

Ce qui est impossible, car $(\det(A))^2 \geq 0$ et $(-1) < 0$.

$\boxed{C/C}$ Il n'existe aucune matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = -I_n$; où n est impaire

---

$\boxed{2}$ Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = -A$

Alors $\det({}^tA) = \det(-A)$

$\Rightarrow \quad \det(A) = (-1)^n \det(A)$ (car $\det({}^tA) = \det(A)$ et $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$)

$\Rightarrow \quad \det(A) = -\det(A) \quad (n \text{ impaire})$

$\Rightarrow \quad \det(A) = 0$

D'où A n'est pas inversible

$\boxed{\text{Fin Exercice 4}}$

Exercice 6

Considérons la fonction f définie par le déterminant d'ordre $n \geq 2$ suivant

$$\forall x \in \mathbb{C},\ f(x) = \begin{vmatrix} a+x & c+x & \dots & c+x \\ b+x & a+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c+x \\ b+x & \dots & b+x & a+x \end{vmatrix}$$

Montrer que f est une fonction polynomiale de degré ≤ 1.

Indice : *Vous pouvez effectuer des opérations élémentaires sur les colonnes (ou lignes), puis développer le déterminant suivant l'une de ses lignes (ou colonnes).*

Solution

$$f(x) = \begin{vmatrix} a+x & c+x & \dots & c+x \\ b+x & a+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c+x \\ b+x & \dots & b+x & a+x \end{vmatrix}$$

On veut se débarasser du maximum des x.

Avec les opérations élémentaires sur les colonnes suivantes :

$$C_1 \leftarrow C_1 - C_n$$
$$C_2 \leftarrow C_2 - C_n$$
$$\vdots$$
$$C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_n$$

On aura :

$$f(x) = \begin{vmatrix} a-c & 0 & \cdots & \cdots & 0 & c+x \\ b-c & a-c & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & b-c & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ b-c & b-c & & & a-c & c+x \\ b-a & b-a & & & b-a & a+x \end{vmatrix}$$

En développant suivant la nème colonne, on a :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} a_{in} \Delta_{in}$$

$$\text{Or } \begin{cases} \Delta_{in} \text{ est une constante, pour tout } 1 \leq i \leq n \\ \forall\, 1 \leq i \leq n-1,\ a_{in} = c+x \text{ ; polynôme de degré } \leq 1. \\ a_{nn} = a+x \text{ ; polynôme de degré } \leq 1. \end{cases}$$

D'où $f(x)$ est un polynôme de degré ≤ 1.

Fin Exercice 6

$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$ (*Déterminant de* ***Vandermonde***)(1735-1796 Paris)
Soit $n \succeq 2$. Soient $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{C}$. On note :

$$V(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On se propose de montrer que $V(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod\limits_{1 \preceq i \prec j \preceq n} (x_j - x_i)$

(*Résultat à retenir !*).
On raissonera par récurrence sur $n \geq 2$.

A) Initialisation :
Vérifier que la propriété est vraie pour $n = 2$.

B) Hérédité : Soit maintenant $n \succeq 3$. Supposons que la propriété est vraie pour $(n-1)$, et montrons qu'elle est vraie pour n.
Soient alors $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{C}$.

1) Méthode 1 :

a) Par des opérations élémentaires sur les lignes, montrer que

$$V(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) \right) V(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$$

b) Conclure.

2) Méthode 2 : Notons $P(X) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & \dots & x_{n-1} & X \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & X^{n-1} \end{vmatrix}$

a) Vérifier que l'égalité voulue est vraie si $x_1, x_2, ..., x_n$ ne sont pas distincts deux à deux.

b) Supposons maintenant qu'ils sont distincts deux à deux.

i) Justifier que $P(X) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.
Quel est son coéfficient en X^{n-1} ?

ii) Préciser des racines évidentes de P(X).

iii) Justifier la relation

$$P(X) = V(x_1, x_2, ..., x_{n-1})(X - x_1)(X - x_2)...(X - x_{n-1})$$

iv) Conclure.

$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$ (*Déterminant de* ***Vandermonde***)(1735-1796 Paris)
Soit $n \succeq 2$. Soient $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{C}$. On note :

$$V(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On se propose de montrer que $V(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod\limits_{1 \preceq i \prec j \preceq n} (x_j - x_i)$

(*Résultat à retenir !*).
On raissonera par récurrence sur $n \geq 2$.

A) Initialisation :
Vérifier que la propriété est vraie pour $n = 2$.

A) On a $V(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod\limits_{1 \leq i < j \leq 2} (x_j - x_i)$

B) <u>Hérédité :</u> Soit maintenant $n \succeq 3$. Supposons que la propriété est vraie pour $(n-1)$, et montrons qu'elle est vraie pour n.
Soient alors $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{C}$.

1) <u>Méthode 1 :</u>

a) Par des opérations élémentaires sur les lignes, montrer que

$$V(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n-1}(x_n - x_i)\right) V(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$$

1) a)

$$V(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ (x_1 - x_n) & \dots & (x_{n-1} - x_n) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (x_1^{n-2} - x_n \cdot x_1^{n-3}) & \dots & (x_{n-1}^{n-2} - x_n \cdot x_{n-1}^{n-3}) & 0 \\ (x_1^{n-1} - x_n \cdot x_1^{n-2}) & \dots & (x_{n-1}^{n-1} - x_n \cdot x_{n-1}^{n-2}) & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - x_n L_1 \\ \vdots \\ L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - x_n L_{n-2} \\ L_n \leftarrow L_n - x_n L_{n-1} \end{matrix}$$

« On développe suivant la **n**ème <u>colonne</u> ; elle comporte $(n-1)$ "0" »

$$= (-1)^{n+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} (x_1 - x_n) & \dots & (x_{n-1} - x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (x_1^{n-2} - x_n \cdot x_1^{n-3}) & \dots & (x_{n-1}^{n-2} - x_n \cdot x_{n-1}^{n-3}) \\ (x_1^{n-1} - x_n \cdot x_1^{n-2}) & \dots & (x_{n-1}^{n-1} - x_n \cdot x_{n-1}^{n-2}) \end{vmatrix} + 0$$

$$V(x_1,\dots,x_n) = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} (x_1 - x_n) & \cdots & (x_{n-1} - x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (x_1^{n-2} - x_n \cdot x_1^{n-3}) & \cdots & (x_{n-1}^{n-2} - x_n \cdot x_{n-1}^{n-3}) \\ (x_1^{n-1} - x_n \cdot x_1^{n-2}) & \cdots & (x_{n-1}^{n-1} - x_n \cdot x_{n-1}^{n-2}) \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} (x_1 - x_n) & \cdots & (x_{n-1} - x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-3}(x_1 - x_n) & \cdots & x_{n-1}^{n-3}(x_{n-1} - x_n) \\ x_1^{n-2}(x_1 - x_n) & \cdots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1} - x_n) \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} (x_1 - x_n) \cdots (x_{n-1} - x_n) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}}_{= V(x_1,\dots,x_{n-1})}$$

$$V(x_1,\dots,x_n) = V(x_1,\dots,x_{n-1}) \cdot (-1)^{n+1} \cdot (x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1}) \cdot (-1)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(x_1,\dots,x_n) = V(x_1,\dots,x_{n-1}) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i)}$$

Car $(-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n-1} = 1$

On se propose de montrer que $V(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{1 \preceq i \prec j \preceq n} (x_j - x_i)$

(*Résultat à retenir !*).

On raissonera par récurrence sur $n \geq 2$.

A) Initialisation :
Vérifier que la propriété est vraie pour $n = 2$.

B) Hérédité : Soit maintenant $n \succeq 3$. Supposons que la propriété est vraie pour $(n-1)$, et montrons qu'elle est vraie pour n.
Soient alors $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{C}$.

1) Méthode 1 :

a) Par des opérations élémentaires sur les lignes, montrer que

$$V(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i)\right) V(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$$

b) Conclure.

b°) Vérifions que la propriété est vraie pour n.

C-à-d que : $V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

On a :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i)\right) \times V(x_1, \dots, x_{n-1})$$

$$= \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i)\right) \times \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (x_j - x_i)}_{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)}$$

(D'après l'hypothèse de récurrence)

$$\Longrightarrow \boxed{V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)}$$

$\square$

2) Méthode 2 : Notons $P(X) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & \dots & x_{n-1} & X \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & X^{n-1} \end{vmatrix}$

a) Vérifier que l'égalité voulue est vraie si $x_1, x_2, ..., x_n$ ne sont pas distincts deux à deux.

Solution :

On aura l'existence de $k \neq l$ tels que $x_k = x_l$.

Alors $V(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0$, car $C_k = C_l$

et $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = 0$

D'où l'égalité :

$$\boxed{V(x_1, ..., x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)}$$

2) Méthode 2 : Notons $P(X) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & \dots & x_{n-1} & X \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & \boxed{X^{n-1}} \end{vmatrix}$

a) Vérifier que l'égalité voulue est vraie si $x_1, x_2, \dots, x_n$ ne sont pas distincts deux à deux.

b) Supposons maintenant qu'ils sont distincts deux à deux.

i) Justifier que $P(X) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.
Quel est son coéfficient en X^{n-1} ?

2) b) i) Il s'agit de justifier que $P(x)$ s'écrit sous la forme :

$$P(x) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}$$

On développe le déterminant $P(x)$ suivant la nème Colonne.

Et le Coéfficient en X^{n-1} de $P(x)$ est :

$$(-1)^{n+n} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & \dots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

Càd : $\boxed{V(x_1, \dots, x_{n-1})}$

2) Méthode 2 : Notons $P(X) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & \dots & x_{n-1} & X \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & X^{n-1} \end{vmatrix}$

a) Vérifier que l'égalité voulue est vraie si $x_1, x_2, ..., x_n$ ne sont pas distincts deux à deux.

b) Supposons maintenant qu'ils sont distincts deux à deux.

i) Justifier que $P(X) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.
Quel est son coéfficient en X^{n-1} ?

ii) Préciser des racines évidentes de P(X).

2) b) ii) $x_1, \dots, x_{n-1}$ sont des racines évidentes de $P(X)$, car pour chaque $1 \leq i \leq n-1$, $P(x_i) = 0$ du fait que la colonne C_i se repète.

2) Méthode 2 : Notons $P(X) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & \dots & x_{n-1} & X \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & X^{n-1} \end{vmatrix}$

a) Vérifier que l'égalité voulue est vraie si $x_1, x_2, ..., x_n$ ne sont pas distincts deux à deux.

b) Supposons maintenant qu'ils sont distincts deux à deux.

i) Justifier que $P(X) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.
Quel est son coéfficient en X^{n-1} ?

ii) Préciser des racines évidentes de P(X).

iii) Justifier la relation

$$P(X) = V(x_1, x_2, ..., x_{n-1})(X - x_1)(X - x_2)...(X - x_{n-1})$$

2) b) iii)

On a $\begin{cases} \text{a) } d^\circ(P) \leq n-1 \\ \text{b) } P \text{ possède } (n-1) \text{ racines distinctes 2 à 2 } x_1, \dots, x_{n-1}. \\ \text{c) Le coéfficient en } X^{n-1} \text{ est } V(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{cases}$

D'où $$P(X) = V(x_1, x_2, ..., x_{n-1})(X - x_1)(X - x_2)...(X - x_{n-1})$$

2) <u>Méthode 2 :</u> Notons $P(X) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & \dots & x_{n-1} & X \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & X^{n-1} \end{vmatrix}$

a) Vérifier que l'égalité voulue est vraie si $x_1, x_2, ..., x_n$ ne sont pas distincts deux à deux.

b) Supposons maintenant qu'ils sont distincts deux à deux.

i) Justifier que $P(X) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.
Quel est son coéfficient en X^{n-1} ?

ii) Préciser des racines évidentes de P(X).

iii) Justifier la relation

$$P(X) = V(x_1, x_2, ..., x_{n-1})(X - x_1)(X - x_2)...(X - x_{n-1})$$

iv) Conclure.

2) b) iv)

$$V(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n-1}(x_n - x_i)\right) V(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$$

On a $V(x_1, ..., x_n) = P(x_n)$

2) b) iii) $\Rightarrow$ $\boxed{V(x_1, .., x_n) = V(x_1, ..., x_{n-1}) \cdot \prod_{i=1}^{n-1}(x_n - x_i)}$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient comme dans B) 1) b) ci-dessus que

$$\boxed{V(x_1, ..., x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_j - x_i)}$$

$\boxed{\text{Fin}}$