STRUCTURES ALGÉBRIQUES
LES GROUPES

Exercice 1 :

Soit $(G, .)$ un groupe.

Définition : On appelle **centre** de G, qu'on note **Z(G)**, la partie de G définie par

$$Z(G) = \{x \in G \mid \forall g \in G,\ gx = xg\}$$

1) Montrer que Z(G) est un sous-groupe de G.
2) Soit $n > 1$. Déterminer le centre de $GL_n(\mathbb{K})$.

Exercice 2 :

Quels sont les sous-groupes finis de $\mathbb{C}^*$?

Exercice 3 :

Soient $(G, .)$ un groupe multiplicatif et L un sous-groupe, avec $L \neq G$.
Déterminer $< \overline{L} >$, le sous-groupe engendré par le complémentaire de L.

Exercice 4 :

Soit $(G, .)$ un groupe multiplicatif fini, de neutre e et de cardinal **n**.
Soit H un sous-groupe de G. Notons $card(H) = p$.
Considérons la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur G par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

1) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur G.
2) Soient $g \in G$ et $\overline{g}$ sa classe d'équivalence.
   i) Expliciter $\overline{g}$.
   ii) Montrer que $\overline{g}$ est équipotent à H.
3) Déduire que $p|n$.
   C'est le ***théorème de Lagrange****.*
4) En déduire le résultat du cours :

$$\forall g \in G,\ g^n = e$$

Exercice 5 :

Soit $(G, .)$ un groupe fini, de neutre **e** et de cardinal **n**, vérifiant que

$$\forall g \in G,\ g^2 = e$$

1) Montrer que G est commutatif.
2) Soient H un sous-groupe de G et $x \notin H$.
Montrer que $K = H \cup xH$ est un sous-groupe de G et que $card(K) = 2 \times card(H)$.
3) En déduire que **n** est une puissance de 2.

Exercice 6 :

Soit H un sous-groupe non nul de $\mathbb{R}$.
Notons $H^+ = H \cap \,]0, +\infty[$ et $\alpha = inf(H^+)$.

1. Justifier d'abord l'existence de α.
2. Supposons ici que $\alpha > 0$.
Montrer que $\alpha \in H^+$ et que $H = \alpha\mathbb{Z}$; où $\alpha\mathbb{Z} = \{\alpha m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.
3. Supposons maintenant que $\alpha = 0$.
On se propose de montrer que H est <u>dense</u> dans $\mathbb{R}$.
Soient alors $x < y$ deux réels.
   i) Montrer que
   $$\exists h \in H,\ 0 < h < y - x$$
   ii) Conclure.

Exercice 7 :

Soient $(G, .)$ un groupe fini et ψ un morphisme de G vers le groupe $\mathbb{C}^*$.
Supposons que ψ n'est pas une application constante.
Montrer que $\displaystyle\sum_{g \in G} \psi(g) = 0$.