

Epreuve de Mathématiques

(toutes filières)

Lundi 17 mai 2010

Extrait

PREMIER PROBLEME :

PARTIE I :

On considère la fonction f définie par la relation $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f .

2) Donner le développement limité de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.

Montrer que f admet en 0 un prolongement par continuité. On précisera par quelle valeur f est alors prolongée et on continuera à appeler f le prolongement ainsi obtenu. On appellera D' le nouvel ensemble de définition de f .

3) f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, préciser $f'(0)$.

Calculer $f'(x)$ sur D puis prouver que f est de classe C^1 sur D' .

4) Etudier les variations de f . On dressera son tableau de variations.

On pourra utiliser la fonction auxiliaire k définie par : $k(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$.

PARTIE II :

Dans la suite, on s'intéressera à l'intégrale suivante : $\int_0^1 f(t)dt$.

On notera L la valeur de cette intégrale mais on ne cherchera pas à calculer cette valeur.
Pour tout entier naturel n non nul on définit les polynômes

$$P_n(X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{X^n}{n}$$

et $Q_n(X) = X - \frac{X^2}{2^2} + \frac{X^3}{3^2} - \frac{X^4}{4^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{X^n}{n^2}$.

6) Préciser pourquoi l'intégrale précédente est bien définie.

7) Justifier : $\forall t \in [0, 1], \quad 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1} = \frac{1 - (-1)^n t^n}{1 + t}$.

8) En déduire : $\forall x \in [0, 1], \quad P_n(x) = \ln(1 + x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1 + t} dt$.

Dans toute la suite on notera : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0, 1], \quad R_n(x) = \int_0^x \frac{(-t)^n}{1 + t} dt$.

9) Etablir la majoration : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0, 1], \quad |R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n + 1}$.

10) Comparer pour tout $x \in]0, 1]$ $Q'_n(x)$ et $\frac{P_n(x)}{x}$.

11) En notant g_n l'application définie pour tout x de $]0, 1]$ par $g_n(x) = \frac{P_n(x)}{x} - \frac{\ln(1 + x)}{x}$ et par $g_n(0) = 0$, montrer :

$$|Q_n(1) - L| \leq \int_0^1 |g_n(x)| dx \leq \frac{1}{(n + 1)^2}.$$

En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(1)$.

12) Déterminer un entier naturel N tel que $Q_N(1)$ approxime L à 10^{-4} près.

PARTIE III :

On s'intéresse à présent aux dérivées successives de f , que l'on note $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

13) Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$.

14) Calculer $f''(x)$ sur $]0, +\infty[$.

15) Montrer que pour tout entier naturel n non nul il existe un polynôme T_n à coefficients réels et un réel a_n tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(n)}(x) = \frac{T_n(x)}{(1 + x)^n x^n} + a_n \frac{\ln(1 + x)}{x^{n+1}}.$$

16) Montrer que tous les coefficients de T_n sont des entiers.

17) En utilisant la formule de Leibniz, calculer $f^{(n)}(x)$ et en déduire la valeur de T_n .

On ne cherchera pas à expliciter une expression de chacun des coefficients de x^k , ($k \in \mathbb{N}$) de ce polynôme.

Vérifier cette expression pour $n=2$.

FIN