CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème.

EXERCICE I

On note f la fonction définie sur $]0,1[$ par :

$$f(t) = \frac{\ln t}{t^2 - 1}.$$

Q1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence puis calculer l'intégrale

$$I_k = \int_0^1 t^{2k} \ln t \, \mathrm{d}t.$$

Q2. Justifier que la fonction f est intégrable sur $]0,1[$, puis démontrer que :

$$\int_0^1 f(t) \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}.$$

On pourra utiliser librement que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

EXERCICE II

Q3. Justifier que la fonction ln est concave sur $]0, +\infty[$ et en déduire que :

$$\forall (a,b,c) \in \,]0,+\infty[^3, \qquad \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

On note f la fonction définie sur $]0, +\infty[^2$ par :

$$f(x;y) = x + y + \frac{1}{xy}.$$

Q4. Démontrer que f admet un unique point critique sur l'ouvert $]0, +\infty[^2$, puis démontrer que f admet un extremum global que l'on déterminera.

PROBLÈME
Un peu d'arithmétique avec la fonction zêta de Riemann

On note ζ la fonction zêta de Riemann définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Le problème est constitué de trois parties indépendantes dans une large mesure.

Partie I - Algorithmique : calcul de zêta aux entiers pairs

La suite des nombres de Bernoulli notée $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$b_0 = 1, \qquad \forall n \geq 1,\ b_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k.$$

Leonhard Euler (1707-1783) a démontré la formule suivante qui exprime les nombres $\zeta(2k)$ à l'aide des nombres de Bernoulli :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} \pi^{2k} b_{2k}}{(2k)!}.$$

Dans cette partie (informatique pour tous), on se propose de programmer le calcul des nombres de Bernoulli b_n afin d'obtenir des valeurs exactes de $\zeta(2k)$.

Les algorithmes demandés doivent être écrits en langage Python. On sera très attentif à la rédaction du code notamment à l'indentation.

Q5. Écrire une fonction `factorielle(n)` qui renvoie la factorielle d'un entier $n \in \mathbb{N}$.

Q6. On considère la fonction Python suivante `binom(n,p)` qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{p}$:

```
def binom(n, p):
    if not(0<= p <= n):
        return 0
    return factorielle(n)//(factorielle(p)*factorielle(n-p))
```

Combien de multiplications sont effectuées lorsque l'on exécute `binom(30,10)` ?
Expliquer pourquoi il est possible de réduire ce nombre de multiplications à 20 ? Quel serait le type du résultat renvoyé si l'on remplaçait la dernière ligne de la fonction `binom` par `return factorielle(n)/(factorielle(p)*factorielle(n-p))` ?

Q7. Démontrer que, pour $n \geq p \geq 1$, on a

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}.$$

En déduire une fonction récursive `binom_rec(n,p)` qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{p}$.

Q8. Écrire une fonction non récursive `bernoulli(n)` qui renvoie une valeur approchée du nombre rationnel b_n. On pourra utiliser librement une fonction `binomial(n,p)` qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{p}$.

Par exemple `bernoulli(10)` renvoie 0,075 757 575 757 575 76 qui est une valeur approchée de $b_{10} = \frac{5}{66}$.

Partie II - Généralités sur la fonction zêta

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x}.$$

Q9. Pour tout $a > 1$ réel, démontrer que la série $\sum \frac{\ln n}{n^a}$ converge.

Q10. Démontrer que la fonction ζ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$, puis qu'elle est décroissante.

Q11. La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]1, +\infty[$?

Q12. Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.

Q13. Soit $x > 1$. On pose :

$$I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} .$$

Démontrer que :

$$I(x) \leq \zeta(x) \leq I(x) + 1.$$

En déduire un équivalent de ζ au voisinage de 1.

Q14. Un premier lien avec l'arithmétique : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs de l'entier n. On pose $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et on prend $x > 1$. Justifier que la famille $\left(\frac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in A}$ est sommable et que sa somme vaut $\zeta(x)^2$. En déduire que :

$$\zeta^2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^x} .$$

On pourra considérer la réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ où $A_n = \{(a,b) \in A\ ,\ ab = n\}$.

Partie III - Produit eulérien

Soit $s > 1$ un réel fixé. On définit une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \frac{1}{\zeta(s) k^s}.$$

On rappelle qu'un entier a divise un entier b s'il existe un entier c tel que $b = ac$. On note alors $a|b$.

Q15. Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $P(X \in a\mathbb{N}^*) = \dfrac{1}{a^s}$.

Q16. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ dans $\mathbb{N}^*$ des entiers premiers entre eux deux à deux et $N \in \mathbb{N}^*$.
Démontrer par récurrence sur n que :

$$(a_1|N, a_2|N, \dots, a_n|N) \Leftrightarrow a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n|N.$$

Le résultat persiste-t-il si les entiers $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont seulement supposés premiers dans leur ensemble, c'est-à-dire lorsque leur PGCD vaut 1 ?

Q17. En déduire que si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des entiers de $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux deux à deux, alors les événements $[X \in a_1\mathbb{N}^*], \dots, [X \in a_n\mathbb{N}^*]$ sont mutuellement indépendants.
On pourra noter $(b_1, \dots, b_r)$ une sous-famille de la famille $(a_1, \dots, a_n)$.

On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (2, 3, 5, 7, 11, \dots)$ la suite croissante des nombres premiers.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $X(\omega)$ n'est divisible par aucun des nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Q18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire des questions précédentes que :

$$P(B_n) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right).$$

Q19. Soit ω dans $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n$. Que vaut $X(\omega)$? En déduire que :

$$\zeta(s) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}.$$

On se propose, en application, de prouver que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ des inverses des nombres premiers diverge. On raisonne pour cela par l'absurde en supposant que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ converge.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}.$$

Q20. Justifier que la suite (u_n) converge vers un réel l et que l'on a pour tout réel $s > 1$, $l \geq \zeta(s)$.
Conclure.

FIN

SESSION 2021

CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 1

EXERCICE I

On note f la fonction définie sur $]0,1[$ par :

$$f(t) = \frac{\ln t}{t^2 - 1}.$$

Q1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence puis calculer l'intégrale

$$I_k = \int_0^1 t^{2k} \ln t \, \mathrm{d}t.$$

Q2. Justifier que la fonction f est intégrable sur $]0,1[$, puis démontrer que :

$$\int_0^1 f(t) \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}.$$

On pourra utiliser librement que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Q1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence puis calculer l'intégrale

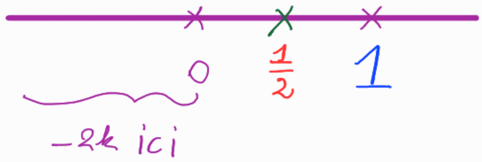
$$I_k = \int_0^1 t^{2k} \ln t \, \mathrm{d}t.$$

1 Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifions que $\int_0^1 t^{2k} \ln(t)\, dt$ existe.

Voici Comment on a réfléchit :

On pense aux intégrales de Bertrand (hors programme !).

$$t^{2k} \ln t = \frac{1}{t^{-2k} (\ln t)^{-1}} \quad ; \ \alpha = -2k \text{ ici}$$



$$-2k < \frac{1}{2} < 1$$

On multiplie alors par $t^{\frac{1}{2}}$

Réponse :

La fonction $t \longmapsto t^{2k} \ln t$ est continue sur $]0, 1]$.

Au voisinage de 0

On a $\lim\limits_{t \to 0} t^{1/2} \cdot (t^{2k} \ln t) = \lim\limits_{t \to 0} t^{2k+\frac{1}{2}} \ln t = 0$ (croissance comparée)

D'où $t^{2k} \ln t \underset{t \to 0}{=} o\left(\frac{1}{t^{1/2}}\right)$

Or $\int_0^1 \frac{1}{t^{1/2}}\, dt$ converge (Riemann ; $\alpha = \frac{1}{2} < 1$)

D'où $\int_0^1 t^{2k} \ln t \, dt$ converge $\square$

② Calculons $\int_0^1 t^{2k} \ln t \, dt$:

$$\int_0^1 t^{2k} \ln t \, dt = \int_0^1 \left(\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right)' . \ln t \, dt$$

$$= \underbrace{\left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1} . \ln t\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \frac{t^{2k+1}}{2k+1} . \frac{1}{t} \, dt$$

Via une intégration par parties, vu que les fonctions $t \mapsto \frac{t^{2k+1}}{2k+1}$ et $t \mapsto \ln t$ sont de classe C^1 sur $]0,1]$, et que $\int_0^1 t^{2k} \ln t \, dt$ existe et aussi $\left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1} . \ln t\right]_0^1$, qui vaut 0.

$$\int_0^1 t^{2k} \ln t \, dt = -\frac{1}{2k+1} \int_0^1 t^{2k} \, dt$$

$$= \frac{-1}{2k+1} . \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{-1}{(2k+1)^2}$$

$\square$

On note f la fonction définie sur $]0,1[$ par :

$$f(t) = \frac{\ln t}{t^2 - 1}$$

Q2. Justifier que la fonction f est intégrable sur $]0,1[$, puis démontrer que :

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}.$$

On pourra utiliser librement que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

1 Justifier que la fonction f est intégrable sur $]0,1[$,

$f : t \longmapsto \dfrac{\ln t}{t^2 - 1}$ est continue sur $]0,1[$.

Au voisinage de 0

$(t^2 - 1) \underset{t \to 0}{\sim} -1 \Rightarrow f(t) \underset{t \to 0}{\sim} (-\ln t)$

Or $(-\ln t) \underset{t \to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ par croissance comparée

Et que $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ converge (Riemann : $\frac{1}{2} < 1$)

Alors $t \longmapsto -\ln t$ est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}]$

Par suite f est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}]$. $\square$

Au voisinage de 1

On a $\displaystyle\lim_{t \to 1} \frac{\ln t}{t - 1} = 1 \Rightarrow \lim_{t \to 1} f(t) = \lim_{t \to 1} \frac{\ln t}{t - 1} \cdot \frac{1}{t+1} = 1/2$

D'où f est prolongeable par continuité en 1.

et donc f est intégrable sur $[\frac{1}{2}, 1[$ $\square$

Enfin $\boxed{f \text{ est intégrable sur }]0,1[}$ $\square$

② Démontrons que $\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{\pi^2}{8}$

On a :

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt$$

$$= \int_0^1 (-\ln t)\cdot\frac{1}{1-t^2}\,dt$$

$$= \int_0^1 (-\ln t)\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(t^2)^n\,dt \quad \left(\text{car } |t^2|<1\right)$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}(-\ln t)\right)dt$$

On espère intégrer terme à terme.

Notons $f_n(t) = t^{2n}(-\ln t)$, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $t\in]0,1[$.

(a) $\forall n\in\mathbb{N}$, f_n est CPM et intégrable sur $]0,1[$ (D'après $\boxed{Q\,1}$)

(b) $\sum_{n\geq 0} f_n(t) = \sum_{n\geq 0} t^{2n}.(-\ln t)$ Converge simplement sur $]0,1[$

et sa somme $t\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}.(-\ln t) = \frac{\ln t}{t^2-1} = f(t)$ est CPM sur $]0,1[$.

(c) La série $\sum_{n\geq 0}\left(\int_0^1 |f_n(t)|\,dt\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ Converge

Car $\frac{1}{(2n+1)^2} \sim \frac{1}{4n^2}$ et $\sum_n \frac{1}{n^2}$ CV (Riemann).

De a), b) et c), on tire que :

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\int_0^1 t^{2n}.(-\ln t)\,dt\right)}_{= \frac{1}{(2n+1)^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

D'autre part, on a :

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Enfin : $\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{\pi^2}{8}$ $\square$

Fin Exercice 1

EXERCICE II

Q3. Justifier que la fonction ln est concave sur $]0,+\infty[$ et en déduire que :

$$\forall(a,b,c)\in\,]0,+\infty[^3,\qquad \sqrt[3]{abc}\leq\frac{a+b+c}{3}.$$

On note f la fonction définie sur $]0,+\infty[^2$ par :

$$f(x;y)=x+y+\frac{1}{xy}.$$

Q4. Démontrer que f admet un unique point critique sur l'ouvert $]0,+\infty[^2$, puis démontrer que f admet un extremum global que l'on déterminera.

Solution

Q3. Justifier que la fonction ln est concave sur $]0,+\infty[$ et en déduire que :

$$\forall(a,b,c)\in\,]0,+\infty[^3,\qquad \sqrt[3]{abc}\leq\frac{a+b+c}{3}.$$

1 Justifier que la fonction ln est concave sur $]0,+\infty[$

ln est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$, et on a :

$$\left(\forall x\in]0,+\infty[,\ \ln''(x)=\frac{-1}{x^2}<0\right)$$

D'où ln est concave sur $]0,+\infty[$. $\square$

2 et en déduire que :

$$\forall(a,b,c)\in\,]0,+\infty[^3,\qquad \sqrt[3]{abc}\leq\frac{a+b+c}{3}.$$

Soient $a,b,c\in]0,+\infty[$.

On a :

Pr.ELAMIRI

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \iff \ln\left((abc)^{\frac{1}{3}}\right) \leq \ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

$$\iff \ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geq \frac{1}{3}\ln(abc)$$

$$\iff \ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geq \frac{\ln a + \ln b + \ln c}{3}$$

Ce qui est vrai car ln concave sur $]0,+\infty[$, a, b, c appartiennent à $]0,+\infty[$, et que $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 1$ et sont positifs.

D'où $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$ $\square$

www.iamateacher.org

On note f la fonction définie sur $]0,+\infty[^2$ par :

$$f(x;y) = x + y + \frac{1}{xy}.$$

Q4. Démontrer que f admet un unique point critique sur l'ouvert $]0,+\infty[^2$, puis démontrer que f admet un extremum global que l'on déterminera.

1 Démontrer que f admet un unique point critique sur l'ouvert $]0,+\infty[^2$

f est d'abord de classe C^1 sur l'ouvert $]0,+\infty[^2$, par opérations sur les fonctions de classe C^1.

Soit $(x,y) \in]0,+\infty[^2$. On a :

$$(x,y) \text{ point critique de } f \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2 y} = 0 \\ 1 - \frac{1}{x y^2} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 y = 1 \\ x y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \frac{1}{x^2} \\ x \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 1/x^2 \\ x^3 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 1/x^2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\iff (x,y) = (1,1)$$

Enfin, $(1,1)$ est l'unique point critique de f sur l'ouvert $]0,+\infty[^2$. $\square$

② Puis démontrons que f admet un extremum global que l'on déterminera.

Si f admettait un extremum global, il serait un point critique, et donc ne serait que $(1,1)$

Vérifions que $(1,1)$ est un extremum global de f sur $]0,+\infty[^2$.

Soit $(x,y) \in]0,+\infty[^2$. On a :

$$f(x,y) - f(1,1) = x + y + \frac{1}{xy} - 3$$

Pr.ELAMIRI
www.iamateacher.org

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

D'après $\boxed{Q3}$, on a :

$$x+y+\frac{1}{xy} \geqslant 3\sqrt[3]{x \cdot y \cdot \frac{1}{xy}} = 3$$

D'où $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ f(x,y) - f(1,1) \geqslant 0$

et donc f admet $(1,1)$ comme minimum global $\square$

Fin Exercice II

Pr.ELAMIRI

www.iamateacher.org

Q5. Écrire une fonction `factorielle(n)` qui renvoie la factorielle d'un entier $n \in \mathbb{N}$.

Fonction itérative

```
In [3]: (executing lines 1 to 5 of "<tmp 1>")

In [4]: factorielle_itér(3)
Out[4]: 6

In [5]: factorielle_itér(0)
Out[5]: 1
```

```
binom-réc.py   <tmp 1>
```

```python
def factorielle_itér(n):
    p=1
    for i in range (1,n+1):
        p*=i
    return p
```

Fonction récursive

```
In [1]: (executing lines 1 to 4 of "<tmp 1>")

In [2]: factorielle_récur(3)
Out[2]: 6

In [3]: factorielle_récur(0)
Out[3]: 1
```

```
binom-réc.py   <tmp 1>
```

```python
def factorielle_récur(n):
    if n==0:
        return 1
    return n*factorielle_récur(n-1)
```

Pr.ELAMIRI

www.iamateacher.org

Q6. On considère la fonction Python suivante `binom(n,p)` qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{p}$:

```
def binom(n, p):
    if not(0<= p <= n):
        return 0
    return factorielle(n)//(factorielle(p)*factorielle(n-p))
```

1 Combien de multiplications sont effectuées lorsque l'on exécute `binom(30,10)` ?

Pour factorielle(30) : 30 multiplications

Pour factorielle(10) : 10 multiplications

Pour factorielle(20) : 20 multiplications

Pour factorielle(10) * factorielle(20) : 1 multiplication

Soit le total de 61 multiplications.

2 Expliquer pourquoi il est possible de réduire ce nombre de multiplications à 20 ?

On avait utilisé : $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Mais on a aussi : $\binom{n}{p} = \dfrac{n.(n-1).\,..\,(n-p+1)}{p!}$

Ainsi : $\binom{30}{10} = \dfrac{30 \times 29 \times \cdots \times 21}{10!}$

En l'utilisant, on aura :

Pour $30 \times 29 \times \cdots \times 21$: $(30-21+1) = 10$ multiplications

Via le code :

```
p = 1
for i in range(21,31):
    p *= i
```

Pour factorielle(10) : 10 multiplication.

Soit le total de : 20 multiplications

③ Quel serait le type du résultat renvoyé si l'on remplaçait la dernière ligne de la fonction `binom` par `return factorielle(n)/(factorielle(p)*factorielle(n-p))`?

En remplaçant // par / le type du résultat sera float (réel).

Regarder par exemple :

```
In [9]: factorielle_récur(6)//(factorielle_récur(2)*factorielle_récur(4))
Out[9]: 15

In [10]: factorielle_récur(6)/(factorielle_récur(2)*factorielle_récur(4))
Out[10]: 15.0
```

Q7. Démontrer que, pour $n \geq p \geq 1$, on a

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}.$$

En déduire une fonction récursive `binom_rec(n,p)` qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{p}$.

① Démontrer que, pour $n \geq p \geq 1$, on a

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

$$\frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} = \frac{n}{p} \cdot \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \binom{n}{p}$$

② En déduire une fonction récursive `binom_rec(n,p)` qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{p}$.

```
In [1]: (executing lines 1 to 6 of "binom-réc.py")

In [2]: binom_rec(4,2)
Out[2]: 6

In [3]: binom_rec(4,0)
Out[3]: 1

In [4]: binom_rec(2,4)
Out[4]: 0
```

binom-réc.py

```python
def binom_rec(n,p):
    if not(0<=p<=n):
        return 0
    if p==0 :
        return 1
    return int(n/p*binom_rec(n-1,p-1))
```

pour que le résultat soit de type entier.

Ou aussi :

```
In [9]: (executing lines 1 to 6 of "binom-réc.py")

In [10]: binom_rec(4,2)
Out[10]: 6

In [11]: binom_rec(4,0)
Out[11]: 1

In [12]: binom_rec(2,4)
Out[12]: 0
```

binom-réc.py

```python
def binom_rec(n,p):
    if not(0<=p<=n):
        return 0
    if p==0 :
        return 1
    return n*binom_rec(n-1,p-1)//p
```

« $n \times \binom{n-1}{p-1}$ est un multiple de p », alors // marche.

Pr.ELAMIRI
www.iamateacher.org

Attention : Le code suivant ne marche pas ; ne commencez pas par // .

```
In [1]: (executing lines 1 to 6 of "binom-réc.py")

In [2]: binom_rec(4,3)
Out[2]: 2

In [3]:
```

il fallait avoir 4

binom-réc.py

```python
def binom_rec(n,p):
    if not(0<=p<=n):
        return 0
    if p==0 :
        return 1
    return n//p*binom_rec(n-1,p-1)
```

Regardez par exemple si vous n'avez pas encore vu :

```
In [1]: 4/3*3
Out[1]: 4.0

In [2]: 4//3*3
Out[2]: 3
```

Pr.ELAMIRI
www.iamateacher.org

Partie I - Algorithmique : calcul de zêta aux entiers pairs

La suite des nombres de Bernoulli notée $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$b_0 = 1, \qquad \forall n \geq 1,\ b_n = \frac{-1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k} b_k.$$

Q8. Écrire une fonction non récursive `bernoulli(n)` qui renvoie une valeur approchée du nombre rationnel b_n. On pourra utiliser librement une fonction `binomial(n,p)` qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{p}$.

Par exemple `bernoulli(10)` renvoie 0,075 757 575 757 575 76 qui est une valeur approchée de $b_{10} = \frac{5}{66}$.

Pour Calculer b_n, on a besoin de $b_0, \dots, b_{n-1}$.

D'où l'importance d'utiliser une $\boxed{\text{liste}}$.

```
In [1]: (executing lines 1 to 16 of "<tmp 2>")

In [2]: bernoulli(10)
Out[2]: 0.07575757575757613

In [3]:
```

Même résultat

binom-réc.py   <tmp 2>

```
def binom_rec(n,p):
    if not(0<=p<=n):
        return 0
    if p==0 :
        return 1
    return int(n/p*binom_rec(n-1,p-1))

def bernoulli(n):
    b=[1]
    for i in range (1,n+1):
        s=0
        for k in range(i):
            s+=binom_rec(i+1,k)*b[k]
        s*=(-1)/(i+1)
        b+=[s]
    return b[n]
```

b_0

$\sum_{k=0}^{i-1}\binom{i+1}{k}b_k$

$b_i = \frac{-1}{i+1}\cdot\sum_{k=0}^{i-1}\binom{i+1}{k}b_k$

b_n

b_i ajouté à $[b_0,\dots,b_{i-1}]$

Pr.ELAMIRI
www.iamateacher.org

Partie II - Généralités sur la fonction zêta

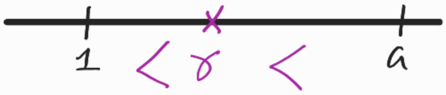
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x}.$$

Q9. Pour tout $a > 1$ réel, démontrer que la série $\sum \frac{\ln n}{n^a}$ converge.

Le reflexe est claire : « Série de Bertrand » (Attention ! Hors programme)

On a $a > 1$.



Soit $1 < \gamma < a$.

$\lim_{n} n^{\gamma} \cdot \left(\frac{\ln n}{n^a}\right) = \lim_{n} n^{\gamma - a} \ln n = 0$; par croissance comparée.

D'où $\frac{\ln n}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^{\gamma}}\right)$

Or $\sum_{n} \frac{1}{n^{\gamma}}$ converge (Riemann : $\gamma > 1$)

Alors $\sum_{n} \frac{\ln n}{n^a}$ converge $\square$

Q10. Démontrer que la fonction ζ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$, puis qu'elle est décroissante.

1 Montrons que ζ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$.

On a : $\forall x \in]1, +\infty[, \ \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$; où $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$.

Il suffit de vérifier les points suivant :

(i) $\forall n \geq 1$, f_n est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$.

(ii) $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$.

(iii) $\sum_{n \geq 1} f_n'$ converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset]1, +\infty[$.

Pour (i) $\forall n \geq 1$, f_n est de Classe C^1 sur $]1,+\infty[$.

$x \mapsto \frac{1}{n^x} = n^{-x} = e^{-x\ln n}$ est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$, par opération sur les fonctions de classe C^1.

Pour (ii) $\sum_{n\geq 1} f_n$ Converge simplement sur $]1,+\infty[$.

Soit $x \in]1,+\infty[$.

La série numérique $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$, qui est $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$, est Converge Comme série de Riemann $(x>1)$.

Pour (iii) $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge Uniformément sur tout segment $[a,b] \subset]1,+\infty[$.

Soit $[a,b] \subset]1,+\infty[$.

Montrons la Convergence normale de $\sum_{n\geq 1} f_n'$ sur $[a,b]$, comme ça on aura la Convergence uniforme.

Soient alors $n \geq 1$ et $x \in [a,b]$.

$|f_n'(x)| = \frac{\ln n}{n^x}$ Car : $\left(e^{-x\ln n}\right)' = (-\ln n)e^{-x\ln n} = -\frac{\ln n}{n^x}$

$= \ln n \cdot e^{-x\ln n}$

On a $a \leq x \leq b \Rightarrow -x \leq -a$

$\Rightarrow -x\ln n \leq -a\ln n$ $(\ln n \geq 0)$

$\Rightarrow e^{-x\ln n} \leq e^{-a\ln n}$

D'où : $|f_n'(x)| \leq \ln n \cdot e^{-a\ln n} = \frac{\ln n}{n^a}$

Pr.ELAMIRI
www.iamateacher.org

Pr.ELAMIRI

Ainsi :

$$\forall n \geqslant 1,\ \forall x \in [a,b],\ |f_n'(x)| \leqslant \frac{\ln n}{n^a}$$ ne dépendant pas de x

Or $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n^a}$ converge d'après (Q9)

D'où $\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement sur $[a,b]$.

Enfin : ζ est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$.

De plus : $\forall x \in]1,+\infty[,\ \zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln n}{n^x}$ $\square$

② Montrons que ζ est décroissante sur $]1,+\infty[$

ζ est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$, et $\zeta' \leqslant 0$ car :

$$\left(\forall x \in]1,+\infty[,\ \zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{-\ln n}{n^x}}_{\leqslant 0} \leqslant 0\right)$$

D'où ζ est décroissante sur $]1,+\infty[$. $\square$

www.iamateacher.org

Q11. La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]1,+\infty[$?

La réponse est non.

En effet :

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $]1,+\infty[$.

On a en plus :

1 point adhérent à $]1,+\infty[$.

$\forall n\geq 1, \lim_{x\to 1} f_n(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$.

D'où la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ converge.

Ce qui est absurde. $\square$

Rappel

Si $\sum_n f_n$ conv unif sur A

a point adhérent à A

$\forall n, \lim_{x\to a} f_n(x)$ existe $= l_n$

Alors

★ La série $\sum_n l_n$ converge

★ $\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{l_n}_{\lim_{x\to a} f_n(x)} = \lim_{x\to a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)$

Q12. Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)$

On espère intervertir lim avec $\sum$.

Il suffit de vérifier les conditions suivante :

★ $\forall n\geq 1, \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = L_n \in \mathbb{R}$

★ $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[2,+\infty[$

Pour ★ $\forall n\geq 1, \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = L_n \in \mathbb{R}$

Soit $n\geq 1$. On a :

$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x}$

Pr.ELAMIRI

www.iamateacher.org

$$= \lim_{x \to +\infty} e^{-x \ln n} \qquad (n \geq 1 ; \ln n \geq 0)$$

$\longrightarrow$ si $n \geq 2$: $(\ln n > 0)$

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-x \ln n} = 0$$

$\longrightarrow$ si $n = 1$:

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1$$

D'où : $\forall n \geq 1, \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = L_n$; où $L_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 2 \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases}$ $\square$

Pour ☆ $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[2, +\infty[$

On montrera la convergence normale et donc la converge uniform en découle.

Soient alors $n \geq 1$ et $x \in [2, +\infty[$. On a :

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n^x} = n^{-x} = e^{-x \ln n} \leq e^{-2 \ln n} = \frac{1}{n^2}$$

$\hookrightarrow$ car $-x \leq -2$

D'où : $\forall n \geq 1, \forall x \in [2, +\infty[, |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann : $2 > 1$)

Alors $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[2, +\infty[$. $\square$

Par suite : $\lim_{x \to +\infty} \zeta(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} L_n = 1$ $\square$ $\left(L_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 2 \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases} \right)$

Pr.ELAMIRI

www.iamateacher.org

Q13. Soit $x > 1$. On pose :

$$I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x}.$$

Démontrer que :

$$I(x) \leq \zeta(x) \leq I(x) + 1.$$

Soit $x > 1$.

$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et $I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt$.

Très classique ! Comparaison série-intégrale

Soit $n \geq 1$. On a :

$$\forall t \in [n, n+1], \quad \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}$$

Car la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissante

D'où :

$$\underbrace{\int_n^{n+1} \frac{1}{(n+1)^x}\,dt}_{=\frac{1}{(n+1)^x}} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,dt \leq \underbrace{\int_n^{n+1} \frac{1}{n^x}\,dt}_{=\frac{1}{n^x}}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, \quad \frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,dt \leq \frac{1}{n^x}$$

On a : $\forall n \geq 1, \quad \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,dt \leq \frac{1}{n^x}$

D'où

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,dt\right)}_{=\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt = I(x)} \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}}_{=\zeta(x)}$$

Alors $I(x) \leq \zeta(x)$ $\square$

Et on a : $\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,dt$

Pr.ELAMIRI
www.iamateacher.org

$\Rightarrow \forall n \geqslant 2, \ \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^x}\,dt$

D'où $\underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x}}_{=\zeta(x)-1} \leqslant \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^x}\,dt\right)}_{=\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt = I(x)}$

$\Rightarrow \quad \zeta(x) - 1 \leqslant I(x)$

Alors : $\zeta(x) \leqslant I(x) + 1$

Enfin : $\boxed{\forall x > 1, \ I(x) \leqslant \zeta(x) \leqslant I(x) + 1}$

Q13. Soit $x > 1$. On pose :

$$I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x}.$$

Démontrer que :

$$I(x) \leq \zeta(x) \leq I(x) + 1.$$

En déduire un équivalent de ζ au voisinage de 1.

On a :

$\forall x > 1, \ I(x) \leqslant \zeta(x) \leqslant I(x) + 1$

$I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt = \int_1^{+\infty} t^{-x}\,dt = \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{1-x}\left(\underbrace{\lim_{t \to +\infty} e^{(1-x)\ln t}}_{\to 0} - 1\right)$

Car $1 - x < 0$

Avec $I(x) = \frac{1}{x-1}$, on a :

$\forall x > 1, \ \frac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant \frac{1}{x-1} + 1$

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{x-1} = +\infty$

D'où $\begin{cases} \left(\frac{1}{x-1}+1\right) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{x-1} \\ \text{et} \\ \frac{1}{x-1} \sim \frac{1}{x-1} \end{cases}$ et donc $\boxed{\zeta(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{x-1}}$ $\square$

Q14. Un premier lien avec l'arithmétique : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs de l'entier n. On pose $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et on prend $x > 1$. Justifier que la famille $\left(\frac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in A}$ est sommable et que sa somme vaut $\zeta(x)^2$.

La suite double $\left(\frac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est sommable si et seulement si :

1) $\forall a \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{b\geq 1} \frac{1}{(ab)^x}$ converge

2) La série $\sum\limits_{a\geq 1}\left(\sum\limits_{b=1}^{+\infty} \frac{1}{(ab)^x}\right)$ converge

Pour 1) $\forall a \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{b\geq 1} \frac{1}{(ab)^x}$ converge :

$\sum\limits_{b\geq 1} \frac{1}{(ab)^x}$ est $\sum\limits_{b\geq 1} \frac{1}{a^x}\cdot\frac{1}{b^x}$ qui converge comme série de Riemann ; avec $x>1$. $\square$

Pour 2) La série $\sum\limits_{a\geq 1}\left(\sum\limits_{b=1}^{+\infty} \frac{1}{(ab)^x}\right)$ converge :

Pr.ELAMIRI

www.iamateacher.org

On a $\displaystyle\sum_{b=1}^{+\infty}\frac{1}{(ab)^x} = \sum_{b=1}^{+\infty}\frac{1}{a^x}\cdot\frac{1}{b^x} = \frac{1}{a^x}\underbrace{\sum_{b=1}^{+\infty}\frac{1}{b^x}}_{=\zeta(x)} = \frac{1}{a^x}\zeta(x)$

Alors la série $\displaystyle\sum_{a\geq 1}\left(\sum_{b=1}^{+\infty}\frac{1}{(ab)^x}\right)$ est $\displaystyle\sum_{a\geq 1}\zeta(x)\frac{1}{a^x}$ qui converge

Comme série de Riemann ; $x>1$. $\square$

Enfin la suite double $\left(\dfrac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est sommable $\square$

En plus, on a :

$$\sum_{(a,b)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}\frac{1}{(ab)^x} = \sum_{a=1}^{+\infty}\left(\sum_{b=1}^{+\infty}\frac{1}{(ab)^x}\right)$$

$$= \sum_{a=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{a^x}\cdot\underbrace{\sum_{b=1}^{+\infty}\frac{1}{b^x}}_{=\zeta(x)}\right)$$

$$= \zeta(x)\cdot\underbrace{\sum_{a=1}^{+\infty}\frac{1}{a^x}}_{=\zeta(x)}$$

$$= \left(\zeta(x)\right)^2 \square$$

Pr.ELAMIRI
www.iamateacher.org

Q14. Un premier lien avec l'arithmétique : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs de l'entier n. On pose $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et on prend $x > 1$. Justifier que la famille $\left(\frac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in A}$ est sommable et que sa somme vaut $\zeta(x)^2$. En déduire que :

$$\zeta^2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^x}$$

On pourra considérer la réunion $\cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ où $A_n = \{(a,b) \in A\,,\ ab = n\}$.

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \{(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \,/\, ab = n\}$.

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une partition de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$; en effet :

☆ $\forall m \neq n$, $A_m \cap A_n = \emptyset$ car :

Si ça existe $(a,b) \in A_m \cap A_n$, alors on aurait $\begin{cases} ab = m \\ \text{et} \\ ab = n \end{cases}$

et donc $m = n$; ce qui est absurde $\square$

☆ $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$; En effet :

$\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \subset \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ est claire.

$\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \supset \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$?

Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

On a $(a,b) \in A_{ab}$, alors $(a,b) \in \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$. $\square$

On a maintenant que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une partition de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

et que la suite double $\left(\frac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est sommable

alors on a la sommation par paquets suivante :

$$\underbrace{\sum_{(a,b)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(ab)^x}}_{=(\zeta(x))^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(a,b)\in A_n} \frac{1}{(ab)^x} \right)$$

Pr.ELAMIRI
www.iamateacher.org

D'où :

$$\left(\zeta(x)\right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(a,b)\in A_n}\frac{1}{(ab)^x}\right)$$

D'autre part :

$$\sum_{(a,b)\in A_n}\frac{1}{(ab)^x} = \sum_{(a,b)\in A_n}\frac{1}{n^x} \quad \left(\text{car } \forall (a,b)\in A_n,\ ab=n\right)$$

$$= \frac{1}{n^x}\times \text{Card}(A_n)$$

Et on a :

$$A_n = \left\{(a,b)\in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* \,/\, ab=n\right\}$$

$$= \left\{\left(a,\frac{n}{a}\right)\in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* \,/\, a \text{ divise } n\right\}$$

D'où $\text{Card}(A_n)$ = le nombre de diviseurs de n $= d_n$

Par suite :

$$\sum_{(a,b)\in A_n}\frac{1}{(ab)^x} = \frac{d_n}{n^x}$$

Enfin :

$$\left(\zeta(x)\right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(a,b)\in A_n}\frac{1}{(ab)^x}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d_n}{n^x} \qquad \square$$

Fin Partie II

Pr.ELAMIRI

www.iamateacher.org

Partie III - Produit eulérien

Soit $s > 1$ un réel fixé. On définit une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \frac{1}{\zeta(s)k^s}.$$

Q15. Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $P(X \in a\mathbb{N}^*) = \dfrac{1}{a^s}$.

On a : $a\mathbb{N}^* = \{ak \,/\, k \in \mathbb{N}^*\}$

Alors : $(X \in a\mathbb{N}^*) = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} (X = ak)$

$$\Rightarrow P(X \in a\mathbb{N}^*) = P\left(\bigsqcup_{k=1}^{+\infty} (X = ak)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = ak)$$ (car les évènements $(X = ak)$ sont deux à deux incompatibles)

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)(ak)^s}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \frac{1}{\zeta(s)k^s}}$$

$$= \frac{1}{\zeta(s)a^s} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}}_{=\zeta(s)}$$

$$= \frac{1}{a^s}$$

$\square$

Q16. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ dans $\mathbb{N}^*$ des entiers premiers entre eux deux à deux et $N \in \mathbb{N}^*$. Démontrer par récurrence sur n que :

$$(a_1|N, a_2|N, \dots, a_n|N) \Leftrightarrow a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n|N.$$

$(\Longleftarrow)$

D'abord l'implication inverse est simple car

$\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_i \,/\, (a_1 \times \cdots \times a_n)$

Alors si $(a_1 \times \cdots \times a_n) \,/\, N$, on aura a_i/N $\square$

Pr.ELAMIRI
www.iamateacher.org

$(\Longrightarrow)$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrons par récurrence sur $n \geq 2$ que :

« $\forall n \geq 2$, si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$ deux à deux premiers entre eux et que $(a_1/N, \dots, a_n/N)$ alors $(a_1 \times \dots \times a_n)/N$ »

Initialisation : Pour $n=2$.

Supp que $a_1, a_2 \in \mathbb{N}^*$ avec $a_1 \wedge a_2 = 1$ et que $(a_1/N$ et $a_2/N)$

On a alors $(a_1 a_2)/N$, d'après le rappel ci-contre.

> **Rappel :** Supposons que $a \wedge b = 1$. On a $\begin{pmatrix} a/N \\ b/N \end{pmatrix} \Longleftrightarrow ab/N$

Hérédité :

Soit $n \geq 2$.

Supposons que la proposition est vraie pour n, et montrons qu'elle est vraie pour $(n+1)$.

Soient alors $a_1, \dots, a_n, a_{n+1} \in \mathbb{N}^*$, deux à deux premiers entre eux et vérifiant : $(a_1/N, \dots, a_n/N, a_{n+1}/N)$.

Montrons que $(a_1 \cdots a_n a_{n+1})/N$.

On a $\begin{pmatrix} a_{n+1} \wedge a_1 \\ \vdots \\ a_{n+1} \wedge a_n \end{pmatrix}$ alors $a_{n+1} \wedge (a_1 \cdots a_n) = 1$.

Et on a $(a_1/N, \dots, a_n/N)$ alors $(a_1 \cdots a_n)/N$ par hypothèse de récurrence.

Ainsi : $\begin{pmatrix} a_{n+1} / N \\ (a_1 \cdots a_n)/N \end{pmatrix}$

D'où $(a_1 \cdots a_n) \times a_{n+1} / N$ $\square$

Q16. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ dans $\mathbb{N}^*$ des entiers premiers entre eux deux à deux et $N \in \mathbb{N}^*$.
Démontrer par récurrence sur n que :

$$(a_1|N, a_2|N, \dots, a_n|N) \Leftrightarrow a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n|N.$$

Le résultat persiste-t-il si les entiers $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont seulement supposés premiers dans leur ensemble, c'est-à-dire lorsque leur PGCD vaut 1 ?

La réponse est non.

Contre-exemple :

On a $\begin{pmatrix} 2/12 \\ 4/12 \\ 3/12 \end{pmatrix}$ et que $2 \wedge 4 \wedge 3 = 1$

Mais $2 \times 4 \times 3 = 24 \not| \; 12$ $\square$

Q17. En déduire que si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des entiers de $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux deux à deux, alors les événements $[X \in a_1\mathbb{N}^*], \dots, [X \in a_n\mathbb{N}^*]$ sont mutuellement indépendants.
On pourra noter $(b_1, \dots, b_r)$ une sous-famille de la famille $(a_1, \dots, a_n)$.

Soit $(b_1, \dots, b_r)$ une sous-famille de la famille $(a_1, \dots, a_n)$.

Il s'agit de montrer que :

$$P\Big((X \in b_1\mathbb{N}^*) \cap \dots \cap (X \in b_r\mathbb{N}^*)\Big) = P(X \in b_1\mathbb{N}^*) \times \dots \times P(X \in b_r\mathbb{N}^*)$$

On a

$$\begin{aligned}(X \in b_1\mathbb{N}^*) \underset{\text{et}}{\cap} \dots \underset{\text{et}}{\cap} (X \in b_r\mathbb{N}^*) &= (b_1 / X) \underset{\text{et}}{\cap} \dots \underset{\text{et}}{\cap} (b_r / X) \\ &= (b_1 \times \dots \times b_r / X) \quad \left(\text{d'après } \boxed{Q16} \text{ puisque les } b_i \text{ 2 à 2 premiers entre eux}\right) \\ &= (X \in (b_1 \dots b_r)\mathbb{N}^*)\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}P\Big((X \in b_1\mathbb{N}^*) \cap \dots \cap (X \in b_r\mathbb{N}^*)\Big) &= P\big(X \in (b_1 \dots b_r)\mathbb{N}^*\big) \\ &= \frac{1}{(b_1 \dots b_r)^s} \quad \left(\boxed{Q15}\right)\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$P(X\in b_1\mathbb{N}^*)\times\cdots\times P(X\in b_r\mathbb{N}^*) = \frac{1}{b_1^s}\times\cdots\times\frac{1}{b_r^s} \quad (\boxed{Q15})$$

$$= \frac{1}{(b_1\cdots b_r)^s}$$

D'où

$$P\left((X\in b_1\mathbb{N}^*)\cap\cdots\cap(X\in b_r\mathbb{N}^*)\right) = P(X\in b_1\mathbb{N}^*)\times\cdots\times P(X\in b_r\mathbb{N}^*)$$

Enfin les événements $(X\in a_1\mathbb{N}^*), \dots, (X\in a_n\mathbb{N}^*)$ sont mutuellement indépendants. $\square$

On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (2,3,5,7,11,\dots)$ la suite croissante des nombres premiers.
Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, on note B_n l'ensemble des $\omega\in\Omega$ tels que $X(\omega)$ n'est divisible par aucun des nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Q18. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déduire des questions précédentes que :

$$P(B_n) = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right).$$

On a d'abord :

$$\omega\in B_n \iff \forall\, 1\leq i\leq n,\ p_i \nmid X(\omega)$$

$$\iff \forall\, 1\leq i\leq n,\ X(\omega)\notin p_i\mathbb{N}^*$$

$$\iff \forall\, 1\leq i\leq n,\ \omega\in(X\notin p_i\mathbb{N}^*)$$

$$\iff \omega\in\bigcap_{i=1}^{n}(X\notin p_i\mathbb{N}^*)$$

D'où $\quad B_n = \bigcap_{i=1}^{n}(X\notin p_i\mathbb{N}^*)$

Pr.ELAMIRI

Alors :

$$P(B_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X \notin p_i \mathbb{N}^*)\right)$$

D'autre part $p_1, \dots, p_n$ sont deux à deux premiers entre eux.

Alors d'après $\boxed{Q17}$, les événements $(X \in p_1 \mathbb{N}^*), \dots, (X \in p_n \mathbb{N}^*)$ sont mutuellement indépendants.

Et par suite, les événements contraires $(X \notin p_1 \mathbb{N}^*), \dots, (X \notin p_n \mathbb{N}^*)$ sont aussi mutuellement indépendants.

D'où :

$$P(B_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X \notin p_i \mathbb{N}^*)\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(X \notin p_i \mathbb{N}^*)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \Big(1 - \underbrace{P(X \in p_i \mathbb{N}^*)}_{= \frac{1}{p_i^s} \text{, d'après } \boxed{Q15}}\Big)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right)$$

$\square$

Q19. Soit ω dans $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$. Que vaut $X(\omega)$?

$\boxed{X(\omega) = 1}$; en effet :

On a :

$\omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \omega \in B_n$

$\iff \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall 1 \leq i \leq n, \ p_i \nmid X(\omega)$

www.iamateacher.org

Pr.ELAMIRI

$\iff X(\omega)$ n'est divisible par aucun nombre premier.

$\iff X(\omega) = 1$

Car tout entier supérieur ou égal à 2 est divisible par au moins un nombre premier. $\square$

Q19. Soit ω dans $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n$. Que vaut $X(\omega)$? En déduire que :

$$\zeta(s) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n) \quad \left(\text{d'après } \boxed{Q18}\right)$$

Rappel :

Si $(B_n)_{n\geqslant 1}$ croissante alors $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n)$

Si $(B_n)_{n\geqslant 1}$ décroissante alors $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n)$

On a $\begin{cases} \omega\in B_n \iff \forall\, 1\leqslant i\leqslant n,\ p_i \nmid X(\omega) \\ \omega\in B_{n+1} \iff \forall\, 1\leqslant i\leqslant n+1,\ p_i \nmid X(\omega) \end{cases}$

D'où $\omega\in B_{n+1} \Longrightarrow \omega\in B_n$

Càd $B_{n+1}\subset B_n$.

D'où $(B_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante

Par suite $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n)$

www.iamateacher.org

Pr.ELAMIRI

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right)\right)=\lim_{n\to+\infty}P(B_n)$$

$$=P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}B_n\right)$$

Et on vient de voir que :

$$\omega\in\bigcap_{n=1}^{+\infty}B_n \iff X(\omega)=1 \iff \omega\in(X=1)$$

D'où $\bigcap_{n=1}^{+\infty}B_n=(X=1)$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right)\right)=P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}B_n\right)$$

$$=P(X=1)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right)\right)=\frac{1}{\zeta(s)}$$

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*, P(X=k)=\frac{1}{\zeta(s)k^s}}$$

En passant à l'inverse, on obtient le résultat voulu :

$$\zeta(s)=\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}$$

$\square$

www.iamateacher.org

On se propose, en application, de prouver que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ des inverses des nombres premiers diverge. On raisonne pour cela par l'absurde en supposant que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ converge.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}.$$

Q20. Justifier que la suite (u_n) converge vers un réel l

1 Considérons la suite $(\ln(U_n))_{n \geq 1}$.

On a :

$$\ln(U_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}\right)$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$ ($-S_n$, où S_n la somme partielle de la série $\sum_{n \geq 1} \ln(1 - \frac{1}{p_n})$)

D'où :

La suite $(\ln(U_n))_{n \geq 1}$ converge $\Longleftrightarrow$ La série $\sum_{n \geq 1} \ln(1 - \frac{1}{p_n})$ converge

On a $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ converge alors $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{p_n} = 0$

D'où $\ln(1 - \frac{1}{p_n}) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{-1}{p_n}$

Or $\sum_n \frac{-1}{p_n}$ converge, alors $\sum_{n \geq 1} \ln(1 - \frac{1}{p_n})$ converge, car les deux séries sont de termes négatifs.

Par suite, la suite $(\ln(U_n))_{n \geq 1}$ converge.

$\Longrightarrow \exists L \in \mathbb{R}, \lim_{n \to +\infty} \ln(U_n) = L$

D'où $\lim_{n \to +\infty} e^{\ln(U_n)} = e^L$

Pr.ELAMIRI
www.iamateacher.org

En fin $\boxed{\text{la suite } (U_n)_{n\geq 1} \text{ Converge.}}$ $\square$

Notons $l = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

② Justifions que : $\boxed{\forall s > 1,\ l \geq \zeta(s)}$

Soit $s > 1$.

Notons que $\begin{cases} l = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1-\frac{1}{P_k}} \right) \\ \zeta(s) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1-\frac{1}{P_k^s}} \right) \end{cases}$

D'où le réflexe de Comparer : $\prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1-\frac{1}{P_k}}$ et $\prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1-\frac{1}{P_k^s}}$

puis passer à la limite.

On a : $\boxed{\forall k \geq 1,\ P_k^s \geq P_k}$ car $\dfrac{P_k^s}{P_k} = P_k^{s-1} = e^{\underbrace{(s-1)}_{>0}\underbrace{\ln P_k}_{>0}} > 1$

$\Rightarrow \forall k \geq 1,\ \dfrac{1}{P_k^s} \leq \dfrac{1}{P_k}$

$\Rightarrow \forall k \geq 1,\ 0 < 1 - \dfrac{1}{P_k} \leq 1 - \dfrac{1}{P_k^s}$

$\Rightarrow \forall k \geq 1,\ 0 < \dfrac{1}{1-\frac{1}{P_k^s}} \leq \dfrac{1}{1-\frac{1}{P_k}}$ $\quad \boxed{P_k > 1 \Rightarrow \frac{1}{P_k} < 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{P_k} > 0}$

D'où : $\forall n \geq 1,\ \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1-\frac{1}{P_k^s}} \leq \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1-\frac{1}{P_k}}$

Par passage à la limite $n \to +\infty$, on tire :

Pr.ELAMIRI
www.iamateacher.org

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}\right)}_{=\zeta(s)} \leqslant \underbrace{\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right)}_{=l}$$

Enfin : $\zeta(s) \leqslant l$ □

Q20. Justifier que la suite (u_n) converge vers un réel l et que l'on a pour tout réel $s > 1$, $l \geq \zeta(s)$. Conclure.

On a alors que :

$$(\forall s > 1,\ \zeta(s) \leqslant l)$$

Or $\zeta(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{x-1}$, alors $\lim_{x\to 1} \zeta(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{x-1} = +\infty$

Ce qui contredit le fait que la fonction ζ soit majorée (par l).

On tire enfin que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_n}$ diverge □

Fin épreuve