# Familles sommables

## Exercice 1 :

1) Déterminer les réels $\alpha$ tels que la famille $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ soit sommable.

## Solution

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in \mathbb{N}^{*2}}$ est sommable $\Leftrightarrow$ ?

### Rappel 1

$(I_n)_{n\geq 2}$ est une partition de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$.

où $I_n = \{(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* / i+j=n\}$

### Rappel 2

$(a_i)_{i\in I}$ famille positive et $I$ dénombrable.

$(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une partition de $I$. On a :

$$(a_i)_{i\in I} \text{ sommable} \Leftrightarrow \begin{cases} a)\ \forall k\in\mathbb{N},\ (a_i)_{i\in I_k} \text{ est sommable} \\ b)\ \text{La série } \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{i\in I_k} a_i\right) \text{ converge} \end{cases}$$

La famille $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in \mathbb{N}^{*2}}$ est positive.

Et $(I_k)_{k\geqslant 2}$ est une partition de $(\mathbb{N}^*)^2$, où $I_k=\{(i,j)\in\mathbb{N}^{*2} / i+j=k\}$

D'où :

$$\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in \mathbb{N}^{*2}} \text{ est sommable} \iff \begin{cases} a)\ \forall k\geqslant 2,\ \left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in I_k} \text{ est sommable} \\ b)\ \text{La série } \sum\limits_{k\geqslant 2}\left(\sum\limits_{(m,n)\in I_k}\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right) \text{ Converge} \end{cases}$$

Pour a) $\forall k\geqslant 2$, $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in I_k}$ est sommable

C'est vérifié car c'est une famille finie, donc sommable.

Notons que $I_k=\{(i,j)\in\mathbb{N}^{*2} / i+j=k\} = \{(i, k-i) \ / \ 1\leqslant i\leqslant k-1\}$

D'où $I_k$ est fini et $\mathrm{Card}(I_k)=k-1$ $\square$

Pour b)

Soit $k\geqslant 2$. On a :

$$\sum_{(m,n)\in I_k}\frac{1}{(m+n)^\alpha} = \sum_{(m,n)\in I_k}\frac{1}{k^\alpha}$$

Constante

$(m,n)\in I_k \iff m+n=k$

$$= \mathrm{Card}(I_k)\times\frac{1}{k^\alpha}$$

$$= \frac{k-1}{k^\alpha}$$

Alors

$$\sum_{k\geq 2}\left(\sum_{(m,n)\in I_k}\frac{1}{(m+n)^{\alpha}}\right) \text{ converge} \iff \text{La série } \sum_{k\geq 2}\left(\sum_{(m,n)\in I_k}\frac{1}{(m+n)^{\alpha}}\right) \text{ converge.}$$

$$\iff \sum_{k\geq 2}\frac{k-1}{k^{\alpha}} \text{ converge}$$

$$\iff \sum_{k\geq 2}\frac{1}{k^{\alpha-1}} \text{ converge}$$

car $\dfrac{k-1}{k^{\alpha}} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{k}{k^{\alpha}} \sim \dfrac{1}{k^{\alpha-1}}$

$$\iff \alpha-1>1 \quad (\text{série de Riemann})$$

$$\iff \alpha>2$$

Enfin :

$\left(\dfrac{1}{(m+n)^{\alpha}}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est sommable $\iff$ La série $\displaystyle\sum_{k\geq 2}\left(\sum_{(m,n)\in I_k}\frac{1}{(m+n)^{\alpha}}\right)$ converge $\iff \alpha>2$

$\square$

1) Déterminer les réels $\alpha$ tels que la famille $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ soit sommable.

2) Montrer que

$$\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \textit{ sommable} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{(m+n)^{2\alpha}}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \textit{ sommable}$$

3) En déduire les réels $\alpha$ pour lesquels la famille $\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

Solution

L'idée

Ça saute aux yeux !
Ça doit être par comparaison des familles positives.

Comparons $\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}$ et $\frac{1}{(m+n)^{2\alpha}}$.

En ignorant le $\alpha$, comparons $\frac{1}{(m^2+n^2)}$ et $\frac{1}{(m+n)^2}$.

Càd, comparons $(m^2+n^2)$ et $(m+n)^2$.

Soit $(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

On a : $(m+n)^2 = m^2+n^2+2mn \geqslant m^2+n^2$

$$\Rightarrow \quad m^2+n^2 \leqslant (m+n)^2$$

Et on a :

$2mn \leqslant m^2+n^2$ (car $(m-n)^2\geqslant 0$)

$\Rightarrow (m+n)^2 = m^2+n^2+2mn \leqslant 2(m^2+n^2)$

D'où $m^2+n^2 \leqslant (m+n)^2 \leqslant 2(m^2+n^2)$

Levons à la puissance $\alpha$.

On sait que la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est croissante sur $]0,+\infty[$ si $\alpha \geqslant 0$ et décroissante si $\alpha < 0$.

Cas 1 : Si $\alpha \geqslant 0$

On a $m^2+n^2 \leqslant (m+n)^2 \leqslant 2(m^2+n^2)$

$$\Rightarrow (m^2+n^2)^\alpha \leqslant (m+n)^{2\alpha} \leqslant 2^\alpha (m^2+n^2)^\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2^\alpha (m^2+n^2)^\alpha} \leqslant \frac{1}{(m+n)^{2\alpha}} \leqslant \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}}$$

Par comparaison des familles positives on tire que :

$$\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \text{ sommable} \iff \left(\frac{1}{(m+n)^{2\alpha}}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \text{ sommable}$$

CQFD

## Cas 2 : Si $\alpha < 0$

On a $m^2+n^2 \leqslant (m+n)^2 \leqslant 2(m^2+n^2)$

$$\Rightarrow \quad (m^2+n^2)^\alpha \geqslant (m+n)^{2\alpha} \geqslant 2^\alpha (m^2+n^2)^\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha} \leqslant \frac{1}{(m+n)^{2\alpha}} \leqslant \frac{1}{2^\alpha (m^2+n^2)^\alpha}}$$

Par comparaison des familles positives on tire que :

$$\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \text{ sommable} \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{(m+n)^{2\alpha}}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \text{ sommable}$$

CQFD

$\square$

1) Déterminer les réels $\alpha$ tels que la famille $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ soit sommable.

2) Montrer que

$$\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \textit{ sommable} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{(m+n)^{2\alpha}}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \textit{ sommable}$$

3) En déduire les réels $\alpha$ pour lesquels la famille $\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable. ?

## Solution

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \text{ sommable} \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{(m+n)^{2\alpha}}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \text{ sommable} \quad (\text{d'après 2}^\circ))$$

$$\Longleftrightarrow 2\alpha > 2 \quad (\text{d'après 1}^\circ))$$

$$\Longleftrightarrow \alpha > 1 \quad \square$$

Fin Exercice 1

**Exercice 2 :**

Soient $0 \preceq r \prec 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Montrer l'existence de la somme suivante et calculer sa valeur : $\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|} e^{im\theta}$

## Solution

Soient $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Montrer l'existence de la somme $\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|} e^{im\theta}$ revient à montrer que la famille $\left(r^{|m|} e^{im\theta}\right)_{m\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

Montrons que la famille $\left(r^{|m|} e^{im\theta}\right)_{m\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

On a :

$\left(r^{|m|} e^{im\theta}\right)_{m\in\mathbb{Z}}$ est sommable $\Longleftrightarrow$ ??

## Rappel

$(a_i)_{i\in I}$ famille de réels ou complexes et $I$ dénombrable.

$I_1$ et $I_2$ forment une partition de $I$. On a :

1) $(a_i)_{i\in I}$ sommable $\Longleftrightarrow$ $(a_i)_{i\in I_1}$ et $(a_i)_{i\in I_2}$ sommables

2) Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I_1} a_i + \sum_{i\in I_2} a_i}$$

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}^{-*}$ forment une partition de $\mathbb{Z}$.

D'où :

$$\left(r^{|m|}e^{im\theta}\right)_{m\in\mathbb{Z}} \text{ est sommable} \iff \left(r^{|m|}e^{im\theta}\right)_{m\in\mathbb{N}} \text{ et } \left(r^{|m|}e^{im\theta}\right)_{m\in\mathbb{Z}^{-*}} \text{ sommables}$$

D'autre part :

$0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$ On a

$$\left(r^{|m|}e^{im\theta}\right)_{m\in\mathbb{N}} \text{ sommable} \iff ?$$

**Rappel**

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ une série à termes réels ou complexes. On a :

1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sommable $\iff$ La série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ ACV

2) Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n}$$

$$\iff \text{La série } \sum_{m\geq 0} r^{|m|}e^{im\theta} \text{ est ACV}$$

$$\iff \sum_{m\geq 0} \left|r^{|m|}e^{im\theta}\right| \text{ converge}$$

$$\iff \sum_{m\geq 0} r^{m} \text{ Converge} \quad \left(\text{Car } \begin{cases} |e^{im\theta}| = 1 \\ |m| = m \end{cases}\right)$$

Ce qui est vrai car $\sum\limits_{m\geq 0} r^m$ est une série géométrique et $0 \leq r < 1$.

D'où $\left(r^{|m|}e^{im\theta}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ est sommable. $\square$

$$\left(r^{|m|}e^{im\theta}\right)_{m\in\mathbb{Z}^{-*}} \text{ sommable} \iff ?$$

$0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$ On a

## Rappel

$I$ est supposé dénombrable.

Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow I$ une bijection.

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou complexes. On a :

1) $\boxed{(a_i)_{i\in I} \text{ sommable} \iff \text{La série } \sum_{n\geq 1} a_{\sigma(n)} \text{ ACV}}$

2) Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)}}$$

L'application $\sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Z}^{-*}$ est une bijection.
$\qquad\qquad n \longmapsto -n$

D'où :

$$\left(r^{|m|} e^{im\theta}\right)_{m\in\mathbb{Z}^{-*}} \text{ sommable} \iff \text{La série } \sum_{n\geq 1} r^{|\sigma(n)|} e^{i\sigma(n)\theta} \text{ est ACV}$$

$$\iff \sum_{n\geq 1} r^n e^{-in\theta} \text{ est ACV}$$

$$\iff \sum_{n\geq 1} \left| r^n e^{-in\theta} \right| \text{ Converge}$$

$$\iff \sum_{n\geq 1} r^n \text{ Converge}$$

Ce qui est vrai car $\sum_{n\geq 1} r^n$ est une série géométrique et $0 \leq r < 1$.

D'où $\left(r^{|m|} e^{im\theta}\right)_{m\in\mathbb{Z}^{-*}}$ sommable $\square$

Enfin $\left(r^{|m|}e^{im\theta}\right)_{m\in\mathbb{Z}}$ est sommable. $\square$

## Calculons la somme $\sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|}e^{im\theta}$ :

**Rappel**

$(a_i)_{i\in I}$ famille de réels ou complexes et $I$ dénombrable.

$I_1$ et $I_2$ forment une partition de $I$. On a :

1) $(a_i)_{i\in I}$ sommable $\Longleftrightarrow$ $(a_i)_{i\in I_1}$ et $(a_i)_{i\in I_2}$ sommables

2) Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I_1} a_i + \sum_{i\in I_2} a_i}$$

La famille $\left(r^{|m|}e^{im\theta}\right)_{m\in\mathbb{Z}}$ est sommable, et $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}^{-*}$ forment une partition de $\mathbb{Z}$.

D'où

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{|m|}e^{im\theta} = \sum_{m\in\mathbb{N}} r^{|m|}e^{im\theta} + \sum_{m\in\mathbb{Z}^{-*}} r^{|m|}e^{im\theta}$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} r^{|m|}e^{im\theta} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^{|-n|}e^{-in\theta} \quad \text{(voir les rappels ci-dessus)}$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} r^{m}e^{im\theta} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^{n}e^{-in\theta}$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} (re^{i\theta})^m + \sum_{n=1}^{+\infty} (re^{-i\theta})^n$$

$$\sum_{n=N}^{+\infty} q^n = \frac{q^N}{1-q}$$

Si $|q|<1$

Rappel

$$= \frac{1}{1-re^{i\theta}} + \frac{re^{-i\theta}}{1-re^{-i\theta}}$$

$$= \frac{1-r^2}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})}$$

$$= \frac{1-r^2}{1-r(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+r^2}$$

$$= \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

Fin Exercice 2

**Exercice 3 :**

Montrer l'existence de la somme suivante et calculer sa valeur :

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}$$

Solution

Montrer l'existence de la somme $\displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}$ revient à

montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ est sommable.

Rappel

Soit $(a_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double positive.

1) Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) $(a_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

ii) A) $\forall m\in\mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_{mn}$ converge

B) La série $\displaystyle\sum_{m\geq 0}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{mn}\right)$ converge.

iii) A) $\forall n\in\mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{m\geq 0} a_{mn}$ converge

B) La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{mn}\right)$ converge.

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{mn} = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{mn}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{mn}\right)$$

On a :

$$\left(\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \text{ est sommable } \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall n\in\mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{m\geq 0}\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} \text{ CV} \\ \displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}\right) \text{ CV} \end{cases}$$

A) Pour $\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{m\geq 0}\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}$ CV

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. M.q. la série $\sum_{m\geq 0}\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}$ CV

On a $\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} \underset{m\to+\infty}{\sim} \frac{1}{m^2}$

Et $\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m^2}$ Converge (Riemann ; $\alpha = 2 > 1$)

D'où par comparaison des séries positives, la série $\sum_{m\geq 0}\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}$ CV $\square$

B) Pour $\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}\right)$ CV

Soit $n\geq 1$. On a :

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} = \lim_{m\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{(k+n^2)(k+n^2+1)}\right)$$

$$= \lim_{m \to +\infty} \sum_{k=0}^{m} \left( \frac{1}{k+n^2} - \frac{1}{k+n^2+1} \right)$$

$$= \lim_{m \to +\infty} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m+n^2+1} \right) \quad \left(\text{Somme télescopique}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} = \frac{1}{n^2}$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left( \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} \right)$ est donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ qui est Convergente, Comme série de Riemann $(\alpha = 2 > 1)$. $\square$

Enfin $\left( \dfrac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} \right)_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ est sommable et on a :

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \underbrace{\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}}_{=\frac{1}{n^2}} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{6} \quad \square$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

somme classique

Fin Exercice 3

**Exercice 4 :**

Soit $\sigma$ une bijection de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{N}^*$.

Déterminer la nature des séries suivantes :

1) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$

Solution

$\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$ converge $\Longleftrightarrow$ ?

Rappel

I est supposé dénombrable.

Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow I$ une bijection.

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille positive. On a

1) $\boxed{(a_i)_{i\in I} \text{ sommable} \Longleftrightarrow \text{La série } \sum\limits_{n\geq 1} a_{\sigma(n)} \text{ converge}}$

On a $\begin{cases} \sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^* \text{ est une bijection} \\ \left(\frac{1}{i}\right)_{i\in\mathbb{N}^*} \text{ est une famille positive} \end{cases}$

D'où $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$ converge $\Longleftrightarrow \left(\frac{1}{i}\right)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est sommable

$\Longleftrightarrow$ ??

## Rappel

Soit $\sum_{n\geq 1} a_n$ une série à termes positifs. On a :

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sommable $\Longleftrightarrow$ La série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge

D'où :

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$ converge $\Longleftrightarrow \left(\frac{1}{i}\right)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est sommable

$\Longleftrightarrow \sum_{i\geq 1} \frac{1}{i}$ converge (famille positive)

Or $\sum_{i\geq 1} \frac{1}{i}$ diverge, comme série de Riemann $(\alpha = 1 \leq 1)$

D'où $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$ diverge aussi. $\square$

**Exercice 4 :**

Soit $\sigma$ une bijection de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{N}^*$.

Déterminer la nature des séries suivantes :

1) $\sum_{n>1} \frac{1}{\sigma(n)}$

2) $\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(\sigma(n))^2}}$ ?

Solution

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(\sigma(n))^2}$ converge $\Leftrightarrow$ ?

Rappel

I est supposé dénombrable.

Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \to I$ une bijection.

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille positive. On a

1) $\boxed{(a_i)_{i\in I} \text{ sommable} \Longleftrightarrow \text{La série } \sum_{n\geq 1} a_{\sigma(n)} \text{ converge}}$

On a $\begin{cases} \sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^* \text{ est une bijection} \\ \left(\frac{1}{i^2}\right)_{i\in\mathbb{N}^*} \text{ est une famille positive} \end{cases}$

D'où $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(\sigma(n))^2}$ converge $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{i^2}\right)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est sommable

$\Leftrightarrow$ ??

# Rappel

Soit $\sum_{n\geq 1} a_n$ une série à termes positifs. On a :

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sommable $\Longleftrightarrow$ La série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge

D'où :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(\sigma(n))^2} \text{ converge} \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{i^2}\right)_{i\in\mathbb{N}^*} \text{ est sommable}$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i\geq 1} \frac{1}{i^2} \text{ converge (famille positive)}$$

Or $\sum_{i\geq 1} \frac{1}{i^2}$ converge, comme série de Riemann $(\alpha = 2 > 1)$

D'où $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(\sigma(n))^2}$ converge aussi. $\square$