

Indications

Exercice 1

Montrer que ce sont des sous de ...

1) Vérifier la condition $\langle 0 \in A_1 \rangle$

2) $\exists \alpha \in A_2 \xleftrightarrow{\text{déf}} \exists \alpha \in \mathbb{R}, \exists(\alpha) = 0.$

$\leadsto 0 \in A_2$

$\leadsto$ Soient ... et ... $\in \dots$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}.$

Montrer que $(\dots) \in \dots$

3) $\exists \alpha \in A_3 \xleftrightarrow{\text{déf}} (\exists \alpha \in \mathbb{R}, \exists(\alpha) = 0)$

Ce n'est pas un sous ...

4) $\exists \alpha \in A_4 \xleftrightarrow{\text{déf}} \alpha^2(\exists) = 3$

Exercice 2

Montrer que ce sont des sous de ...

1) Vérifier la condition $(0 \in A_1).$

$(U_n) \in A_1 \xleftrightarrow{\text{déf}} \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 1$

2) $(U_n) \in A_2 \xleftrightarrow{\text{déf}} U_n = o(n^2)$

$\leadsto [0 \in A_2?] \dots$

→ Soient $\dots$ et $\dots \in \dots$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

M que $(\dots) \in \dots$

$$3) (u_n) \in A_3 \xleftrightarrow{\text{d\`e}f} u_n \sim_n^2 \quad n \rightarrow +\infty$$

→ $(0 \in A_3) ? \dots$

$$4) (u_n) \in A_4 \xleftrightarrow{\text{d\`e}f} (\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 5u_n - 3)$$

→ $(0 \in A_4) ? \dots$

$$5) (u_n) \in A_5 \xleftrightarrow{\text{d\`e}f} (u_n) \text{ est une suite arithmétique}$$

$$\iff (\exists r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = r u_n)$$

→ $(0 \in A_5) ? \dots$

$$6) (u_n) \in A_6 \xleftrightarrow{\text{d\`e}f} (u_n) \text{ est une suite géométrique}$$

$$\iff (\exists q \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q u_n)$$

Ce n'est pas un sac de $\mathbb{R}^N$, dites pourquoi.

Exercice 3

1) M que $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ où (u_1, u_2) famille libre de $\mathbb{R}^N$.

$$\rightarrow u \in F \xleftrightarrow{\text{d\`e}f} (\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n)$$

C'est une suite $\dots$

2) M que $F \cap G \subset \text{Vect}(u_1)$ où $u_1 \neq 0$

$$u \in F \cap G \iff \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

$$\iff \dots \iff (\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dots)$$

Exercice 4

$$f \in F \Leftrightarrow \int_0^1 f(t) dt = 0$$

1) $0 \in F$?

Soient $\dots$ et $\dots$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

M que $(\dots) \in \dots$

2) $F \stackrel{?}{=} \text{Vect}(A, B)$; où (A, B) libre.

$A \in F \Leftrightarrow \dots$; Posons $A(t) = a + bt + Ct^2$.

$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow A \in \text{Vect}(\ast, \ast)$

Exercice 5

1) $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$
 $0 \in F$? et $\dots$ et $\dots$ et $\dots$

2) $F \stackrel{?}{=} \text{Vect}(U, V)$, où (U, V) libre de $\mathbb{K}^4$.

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = \ast \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} + \ast \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

Exercice 6

Soit F un sous- $\mathbb{K}$ -espace de E .

$0 \in F$?

$\dots$

Exercice 7

Revoquez la vidéo correspondant aux

Applications linéaires

sur la chaîne. Cet exercice

vous paraîtra facile

Exercice 8

1) Soient $\dots$ et $\dots \in \mathbb{R}_3[x]$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors $\varphi(\dots) = \dots$

2) i) $\text{Ker}(\varphi) = ?$

Soit $P \in \mathbb{R}_3[x]$. On a :

$$P \in \text{Ker}(\varphi) \stackrel{\text{dét}}{\iff} \varphi(P) = \dots \iff \dots$$

$$\boxed{\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}(\ast)}$$

ii) $\text{Im}(\varphi) = ?$

On exploite $\text{Ker}(\varphi)$ trouvée ci-dessus, puis on applique le théorème du rang.

3) i) Supposons que $a \neq b$:

Par $\text{Ker}(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$, ça ressemble à 2°)
Exercez-vous.

ii) Supposons que $a = b$:

(A) $\text{Ker}(\varphi) = ?$ Soit $P \in \mathbb{R}_3[x]$. On a :

$$P \in \text{Ker}(\varphi) \iff \dots \iff P(a) = 0 \iff \boxed{\dots / P(x)}$$

$$\iff \exists \dots, P(x) = (x-a)(\boxed{\dots})$$

$$\text{Ker}(\varphi) = \{ \dots \} = \text{Vect}(\dots)$$

(B) $\text{Im}(\varphi) = ?$

Faites le même via $\text{Ker}(\varphi) = \dots$ et le théorème du rang.

Exercice 11

1^{re}) Soient $\dots$ et $\dots \in$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrer que $\varphi(\dots) = \dots$

2^{de}) i) Soit $\dots \in E$. On a:

$f \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \dots$; C'est une équation diff $\dots$

$$\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}(\dots)$$

ii) φ est-elle injective?

Exercice 12

1) Soient $\dots$ et $\dots \in$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrer que $\Delta(\dots) = \dots$

2) Pareil à l'exercice 11 ; exercez-vous

3) i) $\text{Ker}(\Delta^2) = ?$

$$f \in \text{Ker}(\Delta^2) \Leftrightarrow \Delta^2(f) = 0 \Leftrightarrow \Delta(\Delta(f)) = 0 \Leftrightarrow \dots$$

$\rightarrow$ Vous avez une équation diff ;

$$\dots \quad \text{Ker}(\Delta^2) = \text{Vect}(\dots)$$

Exercice 13

$$u(z) = iz - i\bar{z}$$

1) $\forall q, u \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$

Soient $\dots$ et $\dots \in$

Soit $\lambda \in$

Montrer que $u(\dots) = \dots$

2) $\text{Ker}(u) = ?$ Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$z \in \text{Ker}(u) \Leftrightarrow u(z) = 0 \Leftrightarrow \dots$$

$$\boxed{\text{Ker}(u) = \dots}$$

3) $\text{Im}(u)$?

$$\rightarrow \text{Im}(u) = \{u(z) / z \in \mathbb{C}\} = \{u(x+iy) / x, y \in \mathbb{R}\} = \dots = \boxed{\begin{matrix} ?? \\ - \\ ? \end{matrix}}$$

$\rightarrow$ Ou via le théorème du rang et que $\boxed{\text{Ker}(u) = \dots}$

$$\dots \text{Im}(u) = ?$$

4) $u^2 = ?$

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$u^2(z) = u(u(z)) = u(\dots) = \dots$$

5) $(\text{Id}_{\mathbb{C}} + 2u)$ est inversible ?

$$\begin{cases} (\text{Id}_{\mathbb{C}} + 2u) \cdot (???) = \text{Id}_{\mathbb{C}} \\ (???) \cdot (\text{Id}_{\mathbb{C}} + 2u) = \text{Id}_{\mathbb{C}} \end{cases} \Rightarrow \text{la conclusion}$$

Exercice 14

On a $f \circ g = \text{id}_E$

$$(\forall x \in E, f(g(x)) = x)$$

i) $\text{Im}(g) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$?

Soit $x \in \text{Im}(g) \cap \text{Ker}(f)$. Alors que $x = 0$.

$$x \in \text{Im}(g) \Rightarrow \exists \dots, x = \dots$$

$$x \in \text{Ker}(f) \Rightarrow \dots$$

ii) $E = \text{Im}(g) + \text{Ker}(f)$?

Soit $x \in E$. Déterminons $x_1 \in \text{Im}(g)$ et $x_2 \in \text{Ker}(f)$ tels que :

$$x = x_1 + x_2.$$

(a) Analyse : Supposons l'existence de tels x_1 et x_2 .

Alors $\dots \dots \dots$ Donc $\begin{cases} x_1 = \boxed{\dots} \\ x_2 = \boxed{\dots} \end{cases}$

(b) Synthèse (càd Vérification)

Vérifier que $\begin{cases} x_1 = \dots \\ x_2 = \dots \end{cases}$ Convient.

$$\% : (E = \text{Im}(g) \oplus \text{Ker}(f))$$

Exercice 15

Calqué sur l'exercice 16.

Exercice 16

$$g \circ f = 0 \Leftrightarrow (\forall x \in \dots, g(f(x)) = 0) \\ \Leftrightarrow (\forall x \in \dots, f(x) \in \dots)$$

Exercice 17

F sous- E et $f \in \mathcal{L}(E)$.

$$(F \text{ stable par } f) \Leftrightarrow (\forall x \in F, f(x) \in F)$$

1) i) $\text{Ker}(v)$ stable par u ?

Soit $x \in \dots$ M que $\dots \in \dots$

ii) $\text{Im}(v)$ stable par u ?

Soit $x \in \text{Im}(v)$ M que $\dots \in \dots$

$$\text{On a } x \in \text{Im}(v) \stackrel{\text{dét}}{\Rightarrow} (\exists t \in \dots, x = \dots)$$

2) Supp que : $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(v)$

i) $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(v)$?

Soit $x \in \text{Im}(u)$ M que $x \in \text{Ker}(v)$

$$x \in \text{Im}(u) \Rightarrow (\exists t \in E, x = u(t))$$

$$\text{et } t \in E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(v) \Rightarrow (\exists \dots, t = \dots)$$

ii) $\text{Im}(v) \subset \text{Ker}(u)$; Paralle à i)

Exercice 19

1) i) $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$? <<il suffit d'écrire >>

Soit $x \in \text{Ker}(f)$. Alors $xf = \dots$

ii) $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$

$$\boxed{x \in \text{Im}(f^2)} \Rightarrow \exists t \in \dots, x = f^2(\dots) \\ \dots \Rightarrow \boxed{x \in \text{Im}(f)}$$

2) i) ($\Rightarrow$)

Supp $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$. Mon $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$??

Soit $x \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$. Alors $x = 0$.

$x \in \text{Im}(f) \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} \exists t \dots, x = \dots$

($\Leftarrow$) Supp $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$. Alors $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$

$\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$: OK

$\cap \text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$.

Soit $x \in \dots$ Alors $x \in \dots$

(ii) ($\Rightarrow$) Supp $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$. Mon $E \subset \text{Im}(f) \cup \text{Ker}(f)$:

Soit $x \in E$. Trouvons $x_1 \in \text{Im}(f)$ et $x_2 \in \text{Ker}(f)$

tel, que $x = x_1 + x_2$.

$x \in E \Rightarrow f(x) \in \text{Im}(f)$ et $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$

$\Rightarrow f(x) \in \text{Im}(f^2)$

$\Rightarrow \exists t \in E, f(x) = \dots$
etc

($\Leftarrow$) Supp que $E = \text{Im}(f) + \text{Ker}(f)$.

M que $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$.

L'inclusion $\supset$ est vérifiée.

$\cap$ par $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f^2)$:

Soit $x \in \text{Im}(f)$. $\cap$ par $x \in \text{Im}(f^2)$.

On a $x \in \text{Im}(f) \Rightarrow (\exists t \in E, x = f(t))$

et $t \in E = \text{Im}(f) + \text{Ker}(f) \Rightarrow \exists \dots \dots \dots$
etc

exercice 20

$$f \in \mathcal{L}(E) : f^3 = f^2 + f$$

$$\cap \text{ q. } E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$$

$$1) \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\} ?$$

Soit $x \in \dots \dots \dots$ $\cap$ que $x = 0$.

$x \in \text{Ker}(f) \Rightarrow \dots \dots \dots$

et $x \in \text{Im}(f) \Rightarrow \exists \dots \dots \dots, x = \dots \dots \dots$
etc

$$2) E = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f) ?$$

Soit $x \in E$. Trouvons $x_1 \in \dots \dots$ et $x_2 \in \dots \dots$ tels que $x = \dots \dots$

Exploiter l'indication de l'énoncé et allez-y !

exercice 21

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in \mathcal{L}(E) \\ u^2 - 5u + 6I = 0 \end{array} \right\}$$

$$1) \left\{ \begin{array}{l} u \cdot (\dots \dots) = I \\ (\dots \dots) \cdot u = I \end{array} \right\} \Rightarrow \text{la conclusion}$$

2) i) $\text{Im}(u - 3I) \subset \text{Ker}(u - 2I)$?

Soit $x \in \text{Im}(\dots)$. Il faut que $x \in \text{Ker}(\dots)$

Où $x \in \text{Im}(\dots) \Rightarrow (\exists t \in E, x = \dots)$ etc

3) i) Posons $I = \alpha(u - 3I) + \beta(u - 2I)$

Développez et identifiez $\Rightarrow \dots$ $\alpha = \dots$ et $\beta = \dots$

ii) $E \subset \text{Im}(u - 3I) \oplus \text{Im}(u - 2I)$?

(a) $\text{Im}(\dots) \cap \text{Im}(\dots) = \{0\}$?

Soit $x \in \text{Im}(\dots) \cap \text{Im}(\dots)$. Il faut que $x = 0$?
 $x \in \text{Im}(u - 3I) \xrightarrow{\text{2°}} x \in \text{Ker}(\dots)$

$\Rightarrow \dots$
 De m $x \in \text{Im}(u - 2I) \Rightarrow \dots$

(b) Soit $x \in E$. Il faut qu'il existe $x_1 \in \text{Im}(u - 3I)$ et $x_2 \in \text{Im}(u - 2I)$ tels que $x = x_1 + x_2$

3° $\Rightarrow I = -(u - 3I) + (u - 2I)$

Alors $x = \dots + \dots$ (etc).

4) $E \subset \text{Ker}(u - 3I) \oplus \text{Ker}(u - 2I)$?

i) $\text{Ker}(u - 3I) \cap \text{Ker}(u - 2I) = \{0\}$

Soit $x \in \dots$. Apr $x = 0$ (Par la ci-dessus)

ii) Soit $x \in E$, $x = x_1 + x_2$ etc
 $\underbrace{x_1}_{\in \text{Im}(u - 3I)} \in \text{Ker}(u - 2I)$

5) a) Où $\begin{cases} p = 3I - u \\ q = u - 2I \end{cases}$; $u = ? p + ? q$

b) i) Il faut $p^2 = p$; $p^2 = (3I - u)^2 = \dots = p$?

ii) $pq \stackrel{?}{=} qp$ (faites vos calculs)

c) $U^n = ?$ $U^n = (p + 3q)^n$, appliquer Newton, c'est légitime, car p et q commutent $p^2 = p$
 et utiliser le fait que $pq = 0$; $p^k = ?$; $q^k = ?$
 car p et q projecteurs.

$$\forall n \geq 1, U^n = 2^n p + 3^n q$$

$$U^0 = I$$

$$\Sigma \begin{cases} p = 3I - U \\ q = U - 2I \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, U^n = (\dots) U + (\dots) I$$

6°) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; f(x, y) = (4x - 2y, x + y)$

i) $f^2 = f + 6I = ?$ Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$f^2(x, y) = f(f(x, y)) = f(4x - 2y, \dots) = \dots ?$$

$$f^2(x, y) - 5f(x, y) + 6 \dots = \dots = (0, 0)$$

ii) $f^n(x, y) = ?$

5) ci) $\Rightarrow f^n = (3^n - 2^n)f + (-2 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n)I$

$$\Rightarrow f^n(x, y) = (2 \cdot 3^n - 2^n)x - 2(3^n - 2^n)y; (3^n - 2^n)x + (-3^n + 2 \cdot 2^n)y$$

iii) $U_n = ?$; $V_n = ?$

$$\forall n \in \mathbb{N}, (U_{n+1}, V_{n+1}) = (4U_n - 2V_n, U_n + V_n) = f(U_n, V_n)$$

SI $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, (U_n, V_n) = f^n(?, ?)$

ensemble a une suite géométrique

etc

Exercice 24

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$g(x, y, z) = (x+z, y+z, 0)$$

1) i) $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$: facile non?!

ii) g projecteur? C'est $g^2 \stackrel{?}{=} g$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, a-t-on $g^2(x, y, z) = g(x, y, z)$

$$g^2(x, y, z) = g(g(\dots)) = g(\overset{x}{x+z}, \overset{y}{y+z}, \overset{z}{0}) = \dots$$

2) i) Base de g (c'est un projecteur)

Notons F l'axe; On a $\{F = \text{Ker}(g - I_{\mathbb{R}^3})\}$

$$(x, y, z) \in F \Leftrightarrow (g - I)(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \boxed{z = 0}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (\quad , \quad)$$

$$\%: \Leftrightarrow (x, y, z) \in \boxed{\text{Vect}(\dots)}$$

$$F = \text{Vect}(\dots)$$

ii) Direction de g ? Notons-la G .

$$\text{On a: } G = \text{Ker}(g)$$

$$(x, y, z) \in G \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \{(x, y, z) \in \text{Vect}(\dots)\}$$

$$\%: \{G = \text{Vect}(\dots)\}$$

Exercice 26

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto f(z) = \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z}$$

1) $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$?

Soient $\dots$ et $\dots \in \mathbb{C}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\text{Alors } f(\dots) = \dots$$

2-1) f projecteur ? car $f^2 \stackrel{?}{=} f$

Soit $z \in E$. On a $f^2(z) = f(z)$.

On a $f^2(z) = f(f(z)) = \dots = f(z)$

3) Éléments caractéristiques; il faut dire la
base et sa direction.

i) La base (notons-la F)

$$F = \ker(f - \text{id}_E)$$

Soit $z \in E$. On a:

$$z \in F \Leftrightarrow (f - \text{id}_E)(z) = 0 \Leftrightarrow \dots$$

$$\text{c/c : } \boxed{F = \{z, z, z\}} \text{ ; } \boxed{F = \text{Vect}(\dots)}$$

ii) La direction (notons-la G)

On a: $G = \ker(f)$. Soit $z \in E$. On a,

$$z \in G \Leftrightarrow f(z) = 0 \Leftrightarrow \dots$$

$$\text{c/c : } \boxed{G = \{z, z, z\}} \text{ ; } \boxed{G = \text{Vect}(\dots)}$$

Exercice 27

$$E = {}^t\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$S: E \longrightarrow E$$

$$f \mapsto S(f) : \left(\forall x \in \mathbb{R}, (S(f))(x) = f(1-x) \right)$$

$$\forall \text{ que } S^2 = I_E ;$$

$$\text{Soit } \dots \in E. \forall \text{ que } S^2(\dots) = \dots ;$$

$$S^2(f) = S(S(f)) ?$$

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}. \forall \text{ que } (S(S(f)))(x) = f(x) :$$

$$\text{On a } \underline{S(f)(z) = f(1-z)} ;$$

$$\Rightarrow \left(S(S(f)) \right)(x) = ? \dots = \underline{f(x)}$$

Soyez rigoureux !!

Exercice 28

I dée vue à l'exercice 21
Question 5°/

Exercez-vous

Exercice 29

$\mathcal{P}$: l'ensemble des projecteurs de E

$$\text{Pour } p, q \in \mathcal{P} : \left(p \leq q \right) \Leftrightarrow (p q = q p = p)$$

$\leq$ relation d'ordre sur $\mathcal{P}$?

Cad $\cap$ que :

- 1) $\leq$ réflexive
- 2) $\leq$ antisymétrique
- 3) $\leq$ transitive

Pour 1°) Soit $p \in \mathcal{P}$. Alors $p \leq p \dots$

Pour 2°) Soient p et $q \in \mathcal{P}$.
Supp que $p \leq q$ et Alors $q \leq p$

Pour 3°) Soient p, q et $r \in \mathcal{P}$.
Supposons que $(p \leq q \text{ et } q \leq r)$
Alors $p \leq r$

Allez-y

Fin indices

