

CONVEXITÉ

Exercice 1 :

Montrer les inégalités suivantes via la convexité :

- 1) $\forall x \geq 0, \sinh(x) \geq x$
- 2) $\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x$
- 3) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$
- 4) $\forall x \in [0, 1], 1+x \leq e^x \leq 1+(e-1)x$
- 5) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0, x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0$

$$6) \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \dots, x_{2^n} \in \mathbb{R}^+, \left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k \right)^{\frac{1}{2^n}} \leq \frac{\sum_{k=1}^{2^n} x_k}{2^n}$$

Inégalité vue et démontrée dans le TD de <Récurrence>

$$7) \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \cos(x) \geq 1 - \frac{2}{\pi}x$$

(Extrait du CNC MP 2014)

Exercice 2 :

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}} \leq \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n x_k^2}{n}}$$

(La deuxième inégalité s'appelle "*L'inégalité arithmético-géométrique*")

Exercice 3 :

Considérons la fonction

$$f :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \ln(\ln x)$$

- 1) Montrer que f est concave.
- 2) En déduire que

$$\forall x, y \in]1, +\infty[, \ln \left(\frac{x+y}{2} \right) \geq \sqrt{\ln(x) \ln(y)}$$

Exercice 4 :

1) Montrer que :

a) La fonction $x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$ b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \dots, x_n \in]0, +\infty[, 1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}} \preceq \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k)\right)^{\frac{1}{n}}$

2) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, \dots, a_n \succ 0, \forall b_1, \dots, b_n \succ 0, \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{\frac{1}{n}} \preceq \left(\prod_{k=1}^n (a_k + b_k)\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 5 :Soit $(p, q) \in]0, +\infty[^2$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1) Montrer que :

a) $\forall (a, b) \in]0, +\infty[^2, \sqrt[p]{a} \sqrt[q]{b} \preceq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$ b) $\forall (a, b) \in]0, +\infty[^2, ab \preceq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$
Dite inégalité de *Young*

2) En déduire que

$$\forall (a_1, a_2, b_1, b_2) \in]0, +\infty[^4, \frac{a_1 b_1}{\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p} \sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}} \preceq \frac{1}{p} \frac{a_1^p}{a_1^p + a_2^p} + \frac{1}{q} \frac{b_1^q}{b_1^q + b_2^q}$$

3) Conclure alors que

$$\forall (a_1, a_2, b_1, b_2) \in]0, +\infty[^4, a_1 b_1 + a_2 b_2 \preceq \sqrt[p]{a_1^p + a_2^p} \sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}$$

4) Montrer qu'en général, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in]0, +\infty[^{2n}, \sum_{k=1}^n a_k b_k \preceq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n a_k^p} \sqrt[q]{\sum_{k=1}^n b_k^q}$$

NB :a) Cette inégalité s'appelle l'inégalité de *Minkowski*.b) Pour $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité de *Cauchy-Schwarz*.

CONVEXITÉ

Exercice 1 :

Montrer les inégalités suivantes via la convexité :

- 1) $\forall x \succeq 0, \sinh(x) \succeq x$
- 2) $\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \preceq x$
- 3) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \preceq \sin x \preceq x$
- 4) $\forall x \in [0, 1], 1+x \preceq e^x \preceq 1+(e-1)x$
- 5) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \succeq 0, x^{n+1} - (n+1)x + n \succeq 0$
- 6) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \dots, x_{2^n} \in \mathbb{R}^+, \left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k \right)^{\frac{1}{2^n}} \preceq \frac{\sum_{k=1}^{2^n} x_k}{2^n}$
Inégalité vue et démontrée dans le TD de <Récurrence>
- 7) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \cos(x) \succeq 1 - \frac{2}{\pi}x$
(Extrait du CNC MP 2014)

Solution

① $\forall x \succeq 0, \sinh(x) \succeq x$

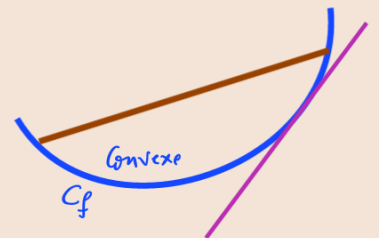
La fonction $\sinh$ est **convexe** sur $\mathbb{R}^+$, alors sa courbe est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse $x_0 = 0$:

$$(T_0): y = \underbrace{\sinh'(0)}_{=1} (x-0) + \underbrace{\sinh(0)}_{=0}$$

Càd $(T_0): y = x$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \sinh(x) \succeq x$$

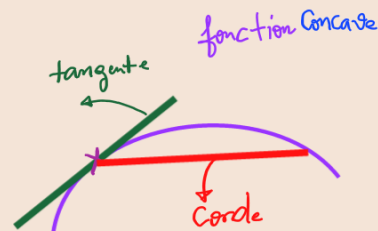


② $\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x$

La fonction $f: x \mapsto \ln(1+x)$ est concave sur $] -1, +\infty[$, alors sa courbe est au-dessous de sa tangente au point d'abscisse $x_0 = 0$:

$$(T_0): y = \underbrace{f'(0)}_{=1}(x-0) + \underbrace{f(0)}_{=0}$$

Càd $(T_0): y = x$



Ainsi : $\forall x \in]-1, +\infty[, f(x) \leq x$

Càd

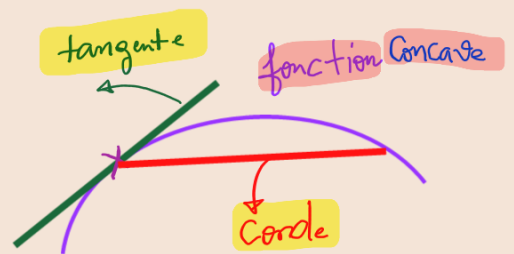
$\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x$



3) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$

Nous avons ici deux inégalités à établir :

i) All que : $(\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin x \leq x)$



La fonction $\sin$ est **concave** sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, alors sa courbe est au-dessous de sa tangente au point d'abscisse $x_0 = 0$:

$$(T_0): y = \underbrace{\sin'(0)}_{=1} (x-0) + \underbrace{\sin(0)}_{=0}$$

Càd $(T_0): y = x$

Ainsi :

$$(\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin(x) \leq x)$$



ii) All que : $(\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \leq \sin x)$

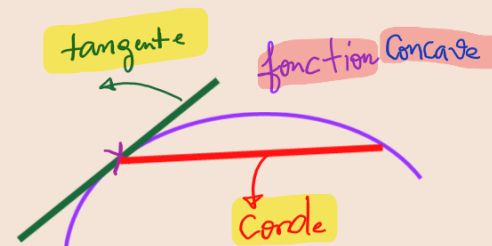
La fonction $\sin$ est **concave** sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, alors sa courbe est au-dessus de sa corde d'extrémités les points $(0,0)$ et $(\frac{\pi}{2}, 1)$.

Cette corde est d'équation : $y = ax + b$

Elle passe par $(0,0)$ et $(\frac{\pi}{2}, 1)$, d'où $\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ 1 = a \cdot \frac{\pi}{2} + b \end{cases}$

Càd $\begin{cases} b = 0 \\ a = \frac{2}{\pi} \end{cases}$

Ainsi son équation est $y = \frac{2}{\pi}x$



Par suite : $(\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \leq \sin x)$



$$6) \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \dots, x_{2^n} \in \mathbb{R}^+, \left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k \right)^{\frac{1}{2^n}} \leq \frac{\sum_{k=1}^{2^n} x_k}{2^n}$$

Cas 1: Si tous les x_k sont dans $]0, +\infty[$

On a:

$$\begin{aligned} \left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k \right)^{\frac{1}{2^n}} &\leq \frac{\sum_{k=1}^{2^n} x_k}{2^n} \Leftrightarrow \ln \left(\left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k \right)^{\frac{1}{2^n}} \right) \leq \ln \left(\frac{\sum_{k=1}^{2^n} x_k}{2^n} \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2^n} \ln \left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k \right) \leq \ln \left(\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} x_k \right) \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \ln(x_k) \leq \ln \left(\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} x_k \right) \end{aligned}$$

Ce qui est vrai, car $\ln$ est concave sur $]0, +\infty[$, les x_k dans $]0, +\infty[$,

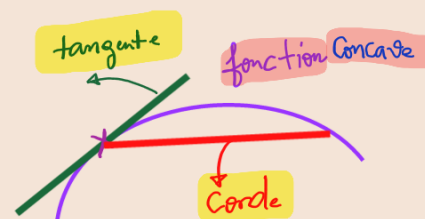
et $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} = 1$. $\square$

Cas 2: Si l'un des x_k est nul:

$$\text{On a } \left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k \right)^{\frac{1}{2^n}} = 0 \text{ et } \frac{\sum_{k=1}^{2^n} x_k}{2^n} \geq 0$$

Alors l'inégalité voulue est vérifiée. $\square$

7) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \cos(x) \geq 1 - \frac{2}{\pi}x$
(Extrait du CNC MP 2014)



La fonction $\cos$ est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, alors sa courbe est au-dessus de sa corde d'extrémités les points $(0, 1)$ et $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

Cette corde est d'équation : $y = ax + b$

Elle passe par $(0, 1)$ et $(\frac{\pi}{2}, 0)$, d'où $\begin{cases} 1 = a \cdot 0 + b \\ 0 = a \cdot \frac{\pi}{2} + b \end{cases}$

Càd $\begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{2}{\pi} \end{cases}$

Ainsi son équation est $y = -\frac{2}{\pi}x + 1$

Par suite : $(\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \cos x \geq 1 - \frac{2}{\pi}x)$



Fin Exercice 1

Exercice 2 :

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}} \preceq \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}} \preceq \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} \preceq \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n x_k^2}{n}}$$

(La deuxième inégalité s'appelle "L'inégalité arithmético-géométrique")

Solution

On a trois inégalités à montrer :

1) M. que : $\left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}} \preceq \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}$

On a :

$$\begin{aligned} \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}} \preceq \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} &\Leftrightarrow \ln \left[\left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}} \right] \leq \ln \left[\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} \right] \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{k=1}^n x_k \right) \leq \ln \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot x_k \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \ln(x_k) \leq \ln \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot x_k \right) \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \ln(x_k) \leq \ln \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot x_k \right) \end{aligned}$$

Ce qui est vrai, car $\ln$ est concave sur $]0, +\infty[$, que tous les x_k sont dans $]0, +\infty[$, et que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = 1$ et $\frac{1}{n} \geq 0$.

2) M. que : $\frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}} \leq \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}}$

$\left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}$

Trouvons-la à partir de l'inégalité établie en 1°).

On a :

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}} \leq \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right)^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}}{n}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\prod_{k=1}^n x_k} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}}{n}$$

$$\Leftrightarrow \left(\prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{x_k} \right) \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}}{n}$$

Ce qui est vrai d'après l'inégalité dans 1°) $\left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}$, en remplaçant

x_k par $\frac{1}{x_k}$.

3) M. que : $\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n x_k^2}{n}}$

Prop. 1

On a :

$$\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n x_k^2}{n}} \Leftrightarrow \left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} \right)^2 \leq \frac{\sum_{k=1}^n x_k^2}{n}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) \leq \frac{\sum_{k=1}^n f(x_k)}{n}, \text{ où } f: t \mapsto t^2$$

Ce qui est vrai car f est convexe sur $]0, +\infty[$.

Piste 2

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} &\stackrel{11}{\geq} \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n x_k^2}{n}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n x_k^2}{n}} \geq \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{x_k^2}}{n} \\ &\Leftrightarrow f\left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k^2}{n}\right) \geq \frac{\sum_{k=1}^n f(x_k^2)}{n} \end{aligned}$$

où $f: t \mapsto \sqrt{t}$

Ce qui est vrai car f est concave sur $]0, +\infty[$, et les x_k^2 y appartiennent et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = 1$.



Fin Exercice 2

Exercice 3 :

Considérons la fonction

$$\begin{aligned} f :]1, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln(\ln x) \end{aligned}$$

- 1) Montrer que f est concave.
- 2) En déduire que

$$\forall x, y \in]1, +\infty[, \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$$

Solution

- 1) Montrer que f est concave.

f est d'abord deux fois dérivable sur $]1, +\infty[$ par opérations sur les fonctions deux fois dérivables.

et on a :

$$\forall x > 1, f''(x) = \frac{-(\ln x + 1)}{(x \ln x)^2} \leq 0$$

Détails

$$f(x) = \ln(\ln x)$$

$$f'(x) = \frac{(\ln x)'}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x \ln x}\right)'$$

$$= \frac{-(x \ln x)'}{(x \ln x)^2}$$

$$= \frac{-(\ln x + 1)}{(x \ln x)^2} \leq 0$$

$$(g \circ f)' = f'(x) \times g'(f(x))$$

$$(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$\left(\frac{1}{u(x)}\right)' = \frac{-u'(x)}{(u(x))^2}$$

$$(fg)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$



2) En déduire que

$$\forall x, y \in]1, +\infty[, \ln \left(\frac{x+y}{2} \right) \geq \sqrt{\ln(x) \ln(y)}$$

Soient $x, y \in]1, +\infty[$. M.-que $\ln \left(\frac{x+y}{2} \right) \geq \sqrt{\ln x \cdot \ln y}$

On a $f: x \mapsto \ln(\ln x)$ est concave sur $]1, +\infty[$.

$$\text{Alors } f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \geq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$$

$$\Rightarrow \ln \left(\ln \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \right) \right) \geq \frac{1}{2} \ln(\ln x) + \frac{1}{2} \ln(\ln y)$$

$$\Rightarrow \ln \left(\ln \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \right) \right) \geq \frac{1}{2} \left(\ln(\ln x) + \ln(\ln y) \right)$$

$$\Rightarrow \ln \left(\ln \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \right) \right) \geq \frac{1}{2} \ln(\ln x \ln y)$$

$$\Rightarrow \ln \left(\ln \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \right) \right) \geq \ln \left((\ln x \ln y)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$\Rightarrow \ln \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \right) \geq (\ln x \ln y)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \ln \left(\frac{x+y}{2} \right) \geq \sqrt{\ln x \cdot \ln y}$$

□

Fin Exercise 3

Exercice 5 :

Soit $(p, q) \in]0, +\infty[^2$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1) Montrer que :

a) $\forall (a, b) \in]0, +\infty[^2, \sqrt[p]{a} \sqrt[q]{b} \preceq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$

b) $\forall (a, b) \in]0, +\infty[^2, ab \preceq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Dite inégalité de *Young*

2) En déduire que

$$\forall (a_1, a_2, b_1, b_2) \in]0, +\infty[^4, \frac{a_1 b_1}{\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p} \sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}} \preceq \frac{1}{p} \frac{a_1^p}{a_1^p + a_2^p} + \frac{1}{q} \frac{b_1^q}{b_1^q + b_2^q}$$

3) Conclure alors que

$$\forall (a_1, a_2, b_1, b_2) \in]0, +\infty[^4, a_1 b_1 + a_2 b_2 \preceq \sqrt[p]{a_1^p + a_2^p} \sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}$$

4) Montrer qu'en général, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in]0, +\infty[^{2n}, \sum_{k=1}^n a_k b_k \preceq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n a_k^p} \sqrt[q]{\sum_{k=1}^n b_k^q}$$

Solution

Soit $(p, q) \in]0, +\infty[^2$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1) Montrer que :

a) $\forall (a, b) \in]0, +\infty[^2, \sqrt[p]{a} \sqrt[q]{b} \preceq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$

Soit $a, b \in]0, +\infty[$. On a :

$$\sqrt[p]{a} \sqrt[q]{b} \preceq \frac{a}{p} + \frac{b}{q} \Leftrightarrow \ln(\sqrt[p]{a} \sqrt[q]{b}) \leq \ln\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln(\sqrt[p]{a}) + \ln(\sqrt[q]{b}) \leq \ln\left(\frac{1}{p} \cdot a + \frac{1}{q} \cdot b\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(a^{\frac{1}{p}}\right) + \ln\left(b^{\frac{1}{q}}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{p} \cdot a + \frac{1}{q} \cdot b\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{p} \cdot a + \frac{1}{q} \cdot b\right) \geq \frac{1}{p} \ln(a) + \frac{1}{q} \ln(b)$$

Ce qui est vrai, car $\ln$ est concave sur $]0, +\infty[$ et que $\begin{cases} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\ \frac{1}{p} \geq 0 \text{ et } \frac{1}{q} \geq 0 \end{cases}$

D'où $\sqrt[p]{a} \sqrt[q]{b} \preceq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$



$$b) \forall (a, b) \in]0, +\infty[^2, ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Soient $a, b \in]0, +\infty[$. Montrons que $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Dans $\sqrt[p]{a} \sqrt[q]{b} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$ dans la question a), on remplace a par a^p et b par b^q , et on conclut.

$$\text{On a : } \sqrt[p]{a^p} \cdot \sqrt[q]{b^q} \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

$$\Rightarrow \boxed{ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}}, \text{ car } \sqrt[p]{a^p} = a \text{ et } \sqrt[q]{b^q} = b.$$



2) En déduire que

$$\forall (a_1, a_2, b_1, b_2) \in]0, +\infty[^4, \frac{a_1 b_1}{\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p} \sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}} \preceq \frac{1}{p} \frac{a_1^p}{a_1^p + a_2^p} + \frac{1}{q} \frac{b_1^q}{b_1^q + b_2^q}$$

Soient $a_1, a_2, b_1, b_2 \in]0, +\infty[$. On a :

$$\frac{a_1 b_1}{\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p} \sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}}$$

$$= \frac{a_1}{\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p}} \times \frac{b_1}{\sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}}$$

$$\sqrt[p]{a} \sqrt[q]{b} \preceq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

$$ab \preceq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

$$\leq \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{a_1}{\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p}} \right)^p + \frac{1}{q} \cdot \left(\frac{b_1}{\sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}} \right)^q$$

$$= \frac{1}{p} \frac{a_1^p}{\left(\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p} \right)^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{b_1^q}{\left(\sqrt[q]{b_1^q + b_2^q} \right)^q}$$

$$= \frac{1}{p} \frac{a_1^p}{a_1^p + a_2^p} + \frac{1}{q} \frac{b_1^q}{b_1^q + b_2^q}$$



Soit $(p, q) \in]0, +\infty[^2$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1) Montrer que :

a) $\forall (a, b) \in]0, +\infty[^2, \sqrt[p]{a} \sqrt[q]{b} \preceq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$

b) $\forall (a, b) \in]0, +\infty[^2, ab \preceq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Dite inégalité de Young

2) En déduire que

$$\forall (a_1, a_2, b_1, b_2) \in]0, +\infty[^4, \frac{a_1 b_1}{\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p} \sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}} \preceq \frac{1}{p} \frac{a_1^p}{a_1^p + a_2^p} + \frac{1}{q} \frac{b_1^q}{b_1^q + b_2^q}$$

3) Conclure alors que

$$\forall (a_1, a_2, b_1, b_2) \in]0, +\infty[^4, a_1 b_1 + a_2 b_2 \preceq \sqrt[p]{a_1^p + a_2^p} \sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}$$

On a :

$$\frac{a_1 b_1}{\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p} \sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}} \preceq \frac{1}{p} \frac{a_1^p}{a_1^p + a_2^p} + \frac{1}{q} \frac{b_1^q}{b_1^q + b_2^q}$$

D'où

$$\frac{a_2 b_2}{\sqrt[p]{a_2^p + a_1^p} \sqrt[q]{b_2^q + b_1^q}} \leq \frac{1}{p} \frac{a_2^p}{a_2^p + a_1^p} + \frac{1}{q} \frac{b_2^q}{b_2^q + b_1^q}$$

Par Addition :

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt[p]{a_2^p + a_1^p} \sqrt[q]{b_2^q + b_1^q}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{a_1^p + a_2^p}{\underbrace{a_2^p + a_1^p}_{=1}} + \frac{1}{q} \frac{b_1^q + b_2^q}{\underbrace{b_2^q + b_1^q}_{=1}}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \underline{1}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt[p]{a_2 + a_1^p} \sqrt[q]{b_2 + b_1^q}} \leq 1$$

$$\Rightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq \sqrt[p]{a_2 + a_1^p} \sqrt[q]{b_2 + b_1^q}$$



Fin Exercise 5

