

Mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes 2001 - Toutes filières - Corrigé

Cette correction a été rédigée par Frédéric Bayart. Si vous avez des remarques à faire, ou pour signaler des erreurs, n'hésitez pas à écrire à : mathweb@free.fr

Mots-clés : exponentielle de matrice, intégration, suite, projection

Commentaires : Un sujet très très Très classique!

Problème 1

Partie A

A.1. Rappelons que la notation t^a signifie en clair $\exp(a \ln t)$. Si $t \rightarrow 0$, $a \ln t \rightarrow -\infty$, et par composition des limites, g_a peut être prolongé par continuité en 0, en posant $g_a(0) = 0$. g_a est clairement C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Maintenant, $g'_a(t) = at^{a-1} \rightarrow 0$ si $t \rightarrow 0$ pour $a \geq 1$ pour les mêmes raisons. De même, $\frac{g_a(t)}{t} \rightarrow 0$ si $t \rightarrow 0$, et donc g_a est dérivable en 0, avec $g'_a(0) = 0$ et g'_a est continue en 0. Donc pour $a \geq 1$, g_a est C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

A.2. D'après **A.1.**, $t \mapsto g_a(t)g_b(1-t)$ est continue sur $[0,1]$, et donc $I(a,b)$ est bien défini. En outre, le changement de variable $y = 1-t$ donne :

$$I(a,b) = \int_1^0 g_a(1-y)g_b(y)(-dy) = \int_0^1 g_a(1-y)g_b(y)dy = I(b,a).$$

A.3. On réalise une intégration par parties :

$$I(a+1,b) = \left[t^{a+1} \times \frac{-(1-t)^{b+1}}{b+1} \right]_0^1 + \frac{a+1}{b+1} I(a,b+1),$$

et les termes au bord étant nuls, on en déduit que :

$$(b+1)I(a+1,b) = (a+1)I(a,b+1).$$

A.4. On a : $I(a,0) = \int_0^1 t^a dt = \frac{1}{a+1}$. Prouvons alors la formule demandée par récurrence sur n , en démontrant le résultat à un n donné pour tous les $a > 0$. Elle est vraie pour $n = 0$, et au rang $n+1$, on a :

$$\begin{aligned} I(a,n+1) &= \frac{n+1}{a+1} I(a+1,n) \\ &= \frac{n+1}{a+1} \frac{n!}{(a+2) \dots (a+n+2)} \\ &= \frac{(n+1)!}{(a+1) \dots (a+n+2)}. \end{aligned}$$

A.5. D'après le résultat précédent :

$$I(p, q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

A.6. On pose $t = \sin^2 \theta$, avec $dt = 2 \sin \theta \cos \theta$. On en déduit :

$$(\sin \theta)^{2p+1} (\cos \theta)^{2q+1} = \frac{1}{2} (\sin^2 \theta)^p (\cos^2 \theta)^q (2 \sin \theta \cos \theta) = \frac{1}{2} t^p (1-t)^q dt.$$

$$\text{On en déduit que } J(p, q) = \frac{1}{2} I(p, q) = \frac{p!q!}{2(p+q+1)!}.$$

Partie B

B.1. f_a est défini pour $1 - \frac{a}{x} > 0$, c'est-à-dire pour $x \leq 0$ ou $x > a$.

B.2. On applique l'inégalité des accroissements finis à la fonction $\ln$, entre les points $x - a$ et x :

$$\inf_{y \in [x-a, x]} \frac{1}{y} |x - (x-a)| \leq \ln x - \ln(x-a) \leq \sup_{y \in [x-a, x]} \frac{1}{y} |x - (x-a)|,$$

et comme $\inf_{y \in [x-a, x]} \frac{1}{y} = \frac{1}{x}$ et $\sup_{y \in [x-a, x]} \frac{1}{y} = \frac{1}{x-a}$, on a le résultat demandé.

B.3. Remarquons que $f_a(x) = x(\ln(x-a) - \ln x)$. **B.2.** se traduit donc en :

$$-a \geq f_a(x) \geq -a \frac{x}{x-a}.$$

Le théorème d'encadrement des limites nous dit alors que $\lim_{+\infty} f_a(x) = -a$: C_a admet une asymptote horizontale d'équation $y = -a$. D'autre part, si x tend vers a , il est clair que $f_a(x)$ tend vers $-\infty$: C_a admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.

Concernant les variations de f_a , remarquons que sur $]a, +\infty[$, $x \mapsto \frac{a}{x}$ est décroissante, donc $x \mapsto 1 - \frac{a}{x}$ est croissante, et la composée de deux fonctions croissantes restant une fonction croissante, $x \mapsto \ln(1 - \frac{a}{x})$ est croissante sur $]a, +\infty[$. Le produit de deux fonctions croissantes est une fonction croissante : f_a est continue sur $]a, +\infty[$.

B.4. A vous de jouer!

B.5. On a : $y_n = \exp(n \ln(1 - a/n)) = \exp(f_a(n))$. On en déduit que (y_n) est croissante, et que (y_n) converge vers e^{-a} .

Partie C

C.1. Le changement de variables $v = \frac{u}{n}$ s'impose. Il donne $du = ndv$, et :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \int_0^1 (1-v)^n n^x v^x n dv \\ &= n^{x+1} I(x, n). \end{aligned}$$

C.2. Si x est fixé et si $n \in \mathbb{N}$, pour $u \in [0, n]$, d'après **B.3.**, on a :

$$f_u(n) \leq f_u(n+1),$$

d'où :

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^x &\leq \left(1 - \frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x \\ \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n u^x du &\leq \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x du. \end{aligned}$$

Maintenant, par positivité de la fonction qu'on intègre, $\int_n^{n+1} \left(1 - \frac{u}{n+1}\right)^{n+1} u^x du \geq 0$, ce qui donne :

$$F_n(x) \leq F_{n+1}(x).$$

C.3.a. Par comparaison de la fonction exponentielle et des polynômes, la fonction $u \mapsto u^{x+2}e^{-u}$ tend vers 0 si u tend vers plus l'infini. En particulier, cette fonction est plus petite que 1 pour $u \geq U$, où U est assez grand, ce qui donne le résultat.

C.3.b. Remarquons que si $u \in [0, n]$, alors $\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n = \exp(f_u(n))$. En **B.3.**, on a prouvé que $-u \geq f_u(n)$, et donc :

$$\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \leq \exp(-u),$$

ou encore :

$$F_n(x) \leq \int_0^n e^{-u} u^x du.$$

Nous distinguons alors deux cas :

– Si $n \leq U$, on a directement :

$$F_n(x) \leq \int_0^U e^{-u} u^x du \leq \int_0^U e^{-u} u^x du + \frac{1}{U}.$$

– Si $n > U$, on coupe l'intégrale en deux :

$$\begin{aligned} F_n(x) &\leq \int_0^U e^{-u} u^x du + \int_U^n e^{-u} u^x du \\ &\leq \int_0^U e^{-u} u^x du + \int_U^n \frac{1}{u^2} du \\ &\leq \int_0^U e^{-u} u^x du + \left[\frac{-1}{u} \right]_U^n \\ &\leq \int_0^U e^{-u} u^x du + \frac{1}{U}. \end{aligned}$$

C.3.c. $(F_n(x))$ est une suite croissante, majorée, donc elle converge!

C.4. D'une part,

$$F_n(x) = n^{x+1} I(x, n) = \frac{n^{x+1} n!}{(x+1) \dots (x+n+1)}.$$

D'autre part,

$$F_n(x+1) = n^{x+2} I(x+1, n) = \frac{n^{x+2} n!}{(x+2) \dots (x+n+2)}.$$

On en déduit que :

$$F_n(x+1) = \frac{n(x+1)}{x+n+2} F_n(x).$$

On fait tendre n vers $+\infty$, en remarquant que $\frac{n}{x+n+2}$ tend vers 1. Donc, pour tout x de $\mathbb{R}_+$,

$$F(x+1) = (x+1)F(x).$$

Il suffit donc de calculer la valeur de $F(0)$ pour en déduire $F(k)$ pour k entier naturel : par une récurrence élémentaire, on prouve en effet que $F(k) = k!F(0)$. Or,

$$F_n(0) = \frac{n \times n!}{(n+1)!} = \frac{n}{n+1}.$$

On a donc $F(0) = 1$, et $F(k) = k!$. La fonction F est une fonction qui interpole sur $\mathbb{R}_+$ la fonction factorielle. On l'appelle en général fonction Gamma.

