Probabiltés - Partie 3

Exercice 1 :

Soit X une variable aléatoire réelle discrète.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que
$$\forall\ 0 \leq k \leq n,\ \forall\ a \in \mathbb{R}^+,\ a^k \leq 1 + a^n$$

2) En déduire que si X admet un moment d'ordre n alors X admet un moment à tout ordre $k \leq n$.

Exercice 2 :

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n} P(X > k) - (n + 1)P(X \geq n + 1)$$

2) En déduire que X possède une espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} P(X > n)$ converge.

   Dans ce cas, montrer que $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$.

Exercice 3 :

Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2 (donc une espérance et une variance).
$\sigma > 0$ étant son écart type et m son espérance.
Montrer que
$$\forall \beta > 0,\ P(|X - m| < \beta\sigma) \geq 1 - \frac{1}{\beta^2}$$

Exercice 4 :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes .

1) Supposons que X et Y suivent une même loi de géométrique de paramètre p.
   Déterminer la loi de leur somme $X + Y$.

2) Supposons que X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.
   Montrer que leur somme $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $(\lambda + \mu)$.

3) Supposons encore que X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que la loi de X sachant $(X+Y=n)$ suit une loi binomiale à préciser.

Exercice 5 :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q.

1) Déterminer $P(X>n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) En déduire la loi de la variable aléatoire $Z = min(X,Y)$.
Justifier qu'il s'agit d'une loi géométrique.

Exercice 6 :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q.
Calculer $E(Z)$, où $Z = max(X,Y)$.

Exercice 7 :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, suivant des lois géométriques de paramètres respectifs $p>0$ et $q>0$.
Quelle est la probabilité que la matrice $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$?

Exercice 8 :

1) Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi géométrique de paramètre p.
Calculer $E\left(\frac{1}{X}\right)$.
2) Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre λ.
Calculer $E\left(\frac{1}{X+1}\right)$.

Exercice 9 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $0<p<1$.
Définition :
On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale négative de paramètres n et p si et seulement si :

$$X(\Omega) = \{n, n+1, \cdots\}$$
$$\forall k \geq n,\ P(X=k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

1) Soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, suivant toutes une même loi géométrique de paramètre p.
Montrer que leur somme $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi binomiale négative de paramètres n et p.
2) En déduire l'espérance et la variance d'une loi binomiale négative de paramètres n et p.

Exercice 10 :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}$, et $0 < p < 1$.
Supposons que :
X suit une loi de Poisson de paramètre λ .
La loi de Y sachant $(X = n)$ est binomiale de paramètres n et p.

1) Déterminer la loi conjointe de (X, Y).
2) Quelle est alors la loi de Y ?

Exercice 11 :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Supposons qu'il existe $a > 0$ tel que la loi conjointe de (X, Y) soit comme suit :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P(X = i, Y = j) = \frac{a}{i!j!}$$

1) Déterminer la valeur de a.
2) Déterminer les loi marginales de X et Y ?
3) X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 12 :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Supposons qu'il existe $a > 0$ tel que la loi conjointe de X et Y vérifie :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P(X = i, Y = j) = a\, \frac{i+j}{2^{i+j}}$$

1) Déterminer la valeur de a.
2) Déterminer les loi marginales de X et Y ?
3) X et Y sont-elles indépendantes ?
4) Calculer $P(X = Y)$.

Exercice 13 :

1) Soient X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

   a) Calculer $E\left(X(X-1)\cdots(X-r+1)\right)$.
   b) Retrouver le résultat obtenu via les fonctions génératrices .
2) Soient maintenant X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $0 < p < 1$ et $r \in \mathbb{N}^*$.
   a) Calculer $E\left(X(X-1)\cdots(X-r+1)\right)$.
   b) Retrouver le résultat obtenu via les fonctions génératrices .

Exercice 14 :

Soit $m \in \mathbb{N}^*$.
Considérons une expérience aléatoire à deux issues : **succès** ou **échec**.
Notons p la probabilité de réussir ; ($(1-p)$ est donc celle pour échouer)
On répète cette expérience, indépendamment, jusqu'à l'obtention de m succès.
Notons T_m le nombre d'essais nécessaires à l'obtention de ces m succès.

1) Quelle est la loi de T_1 ?
2) Déterminer la loi de T_m .
3) Déterminer le développement en série entière de la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1-t)^m}$ sur $]-1,1[$.
4) Déterminer la fonction génératrice de T_m.
   En déduire $E(T_m)$.

Exercice 15 :

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p_n.
Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \frac{p_1+\cdots+p_n}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Exercice 16 :

Un péage autoroutier comporte deux barrières B_1 et B_2.
On suppose que le nombre de voitures arrivant à ce péage par jour suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Chaque voiture choisit au hasard et indépendamment des autres voitures de franchir l'une ou l'autre de ces deux barrières.
On note X_1 (respectivement X_2) la variable aléatoire déterminant le nombre de voitures franchissant la barrière B_1 (respectivement B_2) dans une journée.

1) Quelle est la loi de X_1 ?
2) En considérant la variable aléatoire $X_1 + X_2$, calcuer la covariance de X_1 et X_2.
3) Montrer alors que X_1 et X_2 sont indépendantes.