Calcul algébrique

Résumé

Pr. ELAMIRI

Les nombres qu'on étudiera sont des complexes.

I) Le symbole somme $\sum$

Cas général

Soient p et n deux entiers naturels tels que $p \leq n$.

$$x_p + x_{p+1} + \cdots + x_n = \sum_{k=p}^{n} x_k$$

Cas particulier

$$\sum_{k=p}^{p} x_k = x_p$$

Convention

Si $p > n$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} x_k = 0$

Propriétés immédiates

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k$

b) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda x_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k$

c) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \ \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k + \mu y_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k + \mu \sum_{k=1}^{n} y_k$

2) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a

a) $\sum_{k=1}^{n} \lambda = n\lambda$

b) $\sum_{k=p}^{n} \lambda = \lambda(n-p+1)$

où $p \leq n$.

Somme téléscopique

Prop (Simplification téléscopique)

Supposons que $1 \leq p \leq n$.

1) $\sum_{k=1}^{n} (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_1$

2) $\sum_{k=p}^{n} (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_p$

3) $\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0$

4) $\sum_{k=p}^{n} (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_{p-1}$

II) Le symbole produit $\prod$

Cas général

Soient p et n deux entiers naturels tels que $p \leq n$.

$$x_p \times x_{p+1} \times \cdots \times x_n = \prod_{k=p}^{n} x_k$$

Cas particulier

$$\prod_{k=p}^{p} x_k = x_p$$

Convention

Si $p > n$, $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} x_k = 1$

Propriétés immédiates

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (x_k y_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) \times \left(\prod_{k=1}^{n} y_k\right)$

2) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{y_k}\right) = \frac{\prod_{k=1}^{n} x_k}{\prod_{k=1}^{n} y_k}$

où ($y_k \neq 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$).

3) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a :

i) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \lambda = \lambda^n$

ii) $\prod_{k=p}^{n} \lambda = \lambda^{n-p+1}$ où $p \leq n$.

4) i) $\prod_{k=1}^{n} (\lambda x_k) = \lambda^n \cdot \prod_{k=1}^{n} x_k$

ii) $\prod_{k=p}^{n} (\lambda x_k) = \lambda^{n-p+1} \cdot \prod_{k=p}^{n} x_k$

où $p \leq n$.

5) i) $\prod_{k=1}^{n} x_k = 0 \iff (\exists 1 \leq k \leq n, x_k = 0)$

ii) $\prod_{k=1}^{n} x_k \neq 0 \iff (\forall 1 \leq k \leq n, x_k \neq 0)$

Prop

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \ldots, x_n \in]0, +\infty[$. On a :

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(x_k)$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. On a :

$$e^{\sum_{k=1}^{n} x_k} = \prod_{k=1}^{n} e^{x_k}$$

Prop

1) $\forall n \in \mathbb{N}, \prod_{k=1}^{n} k = n!$

2) i) $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

iii) $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Prop (Produit téléscopique)

Supp que $p \leq n$.

1) $$\prod_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{n+1}}{x_1}$$

2) $$\prod_{k=p}^{n} \frac{x_{k-1}}{x_k} = \frac{x_{p-1}}{x_n}$$

« les x_k étant non nuls »

Prop

1) Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $(\forall 1 \leq i \leq n, \ x_i \leq y_i)$ alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i$

2) Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $(\forall 1 \leq i \leq n, \ x_i \leq y_i)$ alors $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i \leq \prod_{i=1}^{n} y_i$

III) Coéfficients binomiaux

1) Factorielle

Déf

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

NB $0! = 1$

2) Coéfficients binomiaux

Déf 1

Soient $k, n \in \mathbb{N}$.

1) Si $k \leq n$, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

2) Si $k > n$, $C_n^k = 0$

Prop 2

Soient $k, n \in \mathbb{N}$.

1) $C_n^0 = 1$, $C_n^n = 1$

2) $C_n^1 = n$

3) $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$

4) $C_n^k = C_n^{n-k}$, où $k \leq n$.

Prop 3 (Formule de Pascal)

Soient $k, n \in \mathbb{N}$, avec $k \leq n$. On a :

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

3) Triangle de Pascal

$n=0$	C_0^0					
$n=1$	C_1^0	C_1^1				
$n=2$	C_2^0	C_2^1	C_2^2			
$n=3$	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3		
$n=4$	C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4	
$n=5$	C_5^0	C_5^1	C_5^2	C_5^3	C_5^4	C_5^5
$\vdots$						

$n=0 \quad 1$

$n=1 \quad 1 \quad 1$

$n=2 \quad 1 \quad 2 \quad 1$

$n=3 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$

$n=4 \quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$

$n=5 \quad 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$

$\vdots$

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

4) Formule du binôme de Newton

Prop 1

Soient $a, b \in \mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Prop 2

Soient $a, b \in \mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}$. On a aussi :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

5) Identité de Bernoulli

Prop 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a, b \in \mathbb{C}$. On a :

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k . b^{n-1-k}}$$

NB

On a aussi :

$$a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} . b^k$$

$$a^n - b^n = (a-b) \times \left(a^{n-1} + a^{n-2} b + \dots + a b^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

$$a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{i+j=n-1} a^i \, b^j$$

Corollaire 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{C}$. On a :

$$x^n - 1 = (x-1) . \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

Càd

$$x^n - 1 = (x-1)\left(1 + x + \dots + x^{n-1}\right)$$

IV) Sommes doubles

Prop 1

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}} a_{ij} = \underbrace{\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right)}$$

On peut permuter $\sum_i$ et $\sum_j$

NB

Cas de $m=n$:

$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} a_{ij}$ s'écrit aussi $\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}$

Prop 2

Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n\in\mathbb{C}$. On a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \sum_{1\leq i,j\leq n} x_i y_j$$

Attention à cette erreur !

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Erreur

Fin