

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 2

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot *FIN* à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites.

EXTRAIT

PROBLÈME

Q10. Question de cours.

Si E est un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et de sa norme euclidienne associée notée $\| \cdot \|$, si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , on définit le projeté orthogonal sur F d'un vecteur x de E noté $p_F(x)$ ainsi :

$p_F(x)$ est l'unique vecteur de F vérifiant $x - p_F(x) \in F^\perp$.

a) Si $(e_0, e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de F , démontrer que $p_F(x) = \sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle e_i$.

b) Démontrer que pour tout vecteur x de E , $\|p_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$ et que $\sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$.

Q11. Justifier que pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$: $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.

On note désormais $F = \mathbb{R}_n[X]$, $I = [0, +\infty[$ et E l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, telles que la fonction $t \mapsto (f(t))^2 e^{-t}$ soit intégrable sur l'intervalle I .

Justifier que pour f et g dans E , la fonction $t \mapsto f(t)g(t)e^{-t}$ est intégrable sur l'intervalle I .

Q12. Démontrer que E est un espace vectoriel et que l'on définit un produit scalaire sur E en posant :

$$\forall (f, g) \in E^2, \langle f | g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t} dt.$$

Q13. On identifie $\mathbb{R}[X]$ et les fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E .

Ainsi $\langle \cdot | \cdot \rangle$, défini sur $\mathbb{R}[X]$, par $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \langle P | Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Q14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose pour tout réel x ,

$$h_n(x) = x^n e^{-x} \text{ et } L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}).$$

a) Calculer pour tout entier naturel $p \leq n$, $h_n^{(p)}(x)$.

Si $p < n$, que vaut $h_n^{(p)}(0)$?

b) Démontrer que $L_n \in \mathbb{R}[X]$, préciser son degré et son coefficient dominant.

Q15. Soit g élément de $\mathbb{R}[X]$, exprimer $\int_0^{+\infty} g(t)h_n^{(n)}(t)dt$ en fonction de $\int_0^{+\infty} g^{(n)}(t)h_n(t)dt$,

puis exprimer $\langle g | L_n \rangle$ en fonction de $\int_0^{+\infty} g^{(n)}(t)t^n e^{-t} dt$.

(Ici il y avait une erreur d'énoncé ; maintenant corrigée)

Q16. Si L_i et L_j , avec $i < j$, sont deux éléments de F , déterminer $\langle L_i | L_j \rangle$.

Q17. Calculer par des intégrations par parties, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\langle L_n | L_n \rangle$.

Q18. Que peut-on en conclure concernant la base $(L_0, L_1, L_2, \dots, L_n)$ de vecteurs de F ?
Exprimer, pour tout g élément de E , $P_F(g)$ dans cette base.

Q19. Démontrer que la série $\sum_{n \geq 0} \langle g | L_n \rangle^2$ converge et majorer $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g | L_n \rangle^2$.

Q20. Pour $\alpha > \frac{-1}{2}$, on pose $g_\alpha(x) = e^{-\alpha x}$.

Vérifier que $g_\alpha \in E$. (Ici il y avait une erreur d'énoncé ; maintenant corrigée)

Démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g_\alpha | L_n \rangle^2 = \|g_\alpha\|^2$.

FIN

