

Concours National Commun - 2014

Extrait

Première partie : Caractérisation des homothéties en dimension 2 Application au commutant

E désigne un espace vectoriel de dimension 2 et $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E . Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $\mathcal{C}(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f : $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) / fg = gf\}$.

- 1.1 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
 - 1.1.1 Montrer que, pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, il existe un unique λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.
 - 1.1.2 Soit (e_1, e_2) une base de E ; montrer que $\lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$.
 - 1.1.3 On pose $\lambda = \lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$. Montrer que $f = \lambda \text{id}_E$ (homothétie de rapport λ).
- 1.2 Soit f un endomorphisme de E .
 - 1.2.1 Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
 - 1.2.2 Déterminer $\mathcal{C}(f)$ si f est une homothétie.
- 1.3 Soit f un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie.
 - 1.3.1 Justifier qu'il existe $e \in E$ tel que la famille $(e, f(e))$ soit une base de E .
 - 1.3.2 Si $g \in \mathcal{L}(E)$, justifier qu'il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $g(e) = \alpha e + \beta f(e)$ et montrer que $g \in \mathcal{C}(f)$ si et seulement si, $g = \alpha \text{id}_E + \beta f$.
 - 1.3.3 Préciser $\mathcal{C}(f)$; quelle est sa dimension ?
- 1.4 Traduction matricielle : Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$; on pose $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) / AM = MA\}$.
 - 1.4.1 Si A est une matrice scalaire, déterminer $\mathcal{C}(A)$.
 - 1.4.2 Si A n'est pas une matrice scalaire, montrer que $\mathcal{C}(A) = \text{Vect}(I_2, A)$; quelle est sa dimension ?

Fin extrait