A. Quelques exemples

1) On considère $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ pour $\theta \in [0, \pi]$. On a $S(\theta)^2 = I_2$ et il y en a une infinité.

$\boxed{\text{la matrice } A = I_2 \text{ admet une infinité de racines carrées}}$

Soit X une racine carrée de $A = I_2$ qui soit un polynôme en A

Ceci nous fournit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $X = P(I_2)$

Alors $X = P(1)I_2$ et $I_2 = X^2 = P(1)^2 I_2$ donc $P(1) \in \{-1, 1\}$ donc $X \in \{I_2, -I_2\}$

La réciproque étant évidente :

$\boxed{\text{Les racines carrées de } I_2 \text{ qui sont des polynômes en A sont les matrices } I_2 \text{ ou } -I_2}$

2) Je note $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $J^2 = A$, $AJ = JA = A^2 = 0$

donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $(J + \lambda A)^2 = A$ ainsi $\boxed{\text{A admet une infinité de racines carrées}}$

On suppose l'existence de X polynôme en A qui soit une racine carré de A.

Comme on a $\forall k \geqslant 2$, $A^k = 0$, ceci nous fournit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $X = aI_3 + bA$

De plus $A = X^2 = a^2 I_3 + 2abA$

Par coefficients diagonaux, on trouve $a = 0$ donc $A = X^2 = 0$

$\boxed{\text{Aucune racine carrée de A n'est un polynôme en A}}$

3) **Existence :** Comme A est symétrique réelle, ceci nous fournit $\Omega \in O(3)$ et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ (où les λ_i sont les valeurs propres de A comptées avec multiplicités) tel que $A = \Omega D \Omega^\top$.

Comme A est définie positive, on peut écrire $D = \delta^2$ où $\delta = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$

de sorte que $\delta^2 = D$ et ainsi $\left(\Omega \delta \Omega^\top\right)^2 = A$

De plus les valeurs propres de $\Omega \delta \Omega^\top$ sont strictement positives car $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sqrt{\lambda_i} > 0$

et $\left(\Omega \delta \Omega^\top\right)^\top = \left(\Omega^\top\right)^\top \delta^\top \Omega^\top = \Omega \delta \Omega^\top$

Ainsi $\Omega \delta \Omega^\top$ est racine carrée de A symétrique réelle définie positive.

Unicité : Soit B une racine carrée de A symétrique réelle définie positive.

Je note respectivement a et b les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés aux matrices A et B.

Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(a)$. On a $\lambda > 0$.

Comme $a \circ b = a^3 = b \circ a$, $E_\lambda(a)$ est stable par b.

Je note Id_λ l'identité de $E_\lambda(a)$ et b_λ l'endomorphisme induit par b sur $E_\lambda(a)$

Soit $\mu \in \operatorname{Sp}(b_\lambda)$. Soit x un vecteur propre de b_λ associé à μ

On a $a(x) = b^2(x)$ donc $\lambda x = b(\mu x) = \mu b(x) = \mu^2 x$

Comme $x \neq 0$, on a $\mu^2 = \lambda$ et ainsi $\mu = \sqrt{\lambda}$ car $\mu \in \operatorname{Sp}(b_\lambda) \subset \operatorname{Sp}(b) = \operatorname{Sp}(B) \subset]0, +\infty[$

La matrice B étant symétrique réelle, l'endomorphisme b est symétrique car la base canonique est orthonormée. Ainsi l'endomorphisme induit b_λ est symétrique donc diagonalisable or $\operatorname{Sp}(b_\lambda) \subset \{\sqrt{\lambda}\}$

Par conséquent $b_\lambda = \sqrt{\lambda}\mathrm{Id}_\lambda$. Ainsi

$$\forall \lambda \in \operatorname{Sp}(a),\ \forall x \in E_\lambda(a),\ b(x) = \sqrt{\lambda} x \qquad (1)$$

or $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(a)} E_\lambda(a)$ car A est diagonalisable

Ainsi l'application linéaire b et donc B sont entièrement déterminées par la relation (1)

Ce qui nous donne l'unicité.

Conclusion : $\boxed{\text{A admet une unique racine carrée symétrique réelle définie positive}}$

B. Existence et calcul d'une racine carrée

4) Je note $\mathrm{U}^2 = (v_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on sait que par produit U^2 est triangulaire supérieure et donc pour $1 \leqslant j < i \leqslant n$, alors $v_{i,j} = 0 = t_{i,j}$ et de plus $\forall i \in [\![1,n]\!],\ v_{i,i} = u_{i,i}^2$

L'équation $\mathrm{U}^2 = \mathrm{T}$ est donc équivalente au système $\begin{cases} u_{i,i}^2 = t_{i,i} & (1 \leqslant i \leqslant n) \\ v_{i,j} = t_{i,j} & (1 \leqslant i < j \leqslant n) \end{cases}$

Pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, on a $v_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} u_{i,k}u_{k,j} + u_{i,i}u_{i,j} + \sum_{k=i+1}^{j-1} u_{i,k}u_{i,k} + u_{i,j}u_{j,j} + \sum_{k=j+1}^{n} u_{i,k}u_{k,n}$

Avec les sommes vides valant 0 et comme pour $k > \ell$, on a $u_{k,\ell} = 0$, on a : $v_{i,j} = (u_{i,i} + u_{j,j})u_{i,j} + \displaystyle\sum_{k=i+1}^{j-1} u_{i,k}u_{i,k}$

donc $v_{i,j} = t_{i,j} \Longleftrightarrow (u_{i,i} + u_{j,j})u_{i,j} = t_{i,j} - \sum\limits_{k=i+1}^{j-1} u_{i,k}u_{k,j}$

$$\boxed{\text{L'équation } \mathrm{U}^2 = \mathrm{T} \text{ est donc équivalente au système } \begin{cases} u_{i,i}^2 = t_{i,i} & (1 \leqslant i \leqslant n) \\ (u_{i,i} + u_{j,j})u_{i,j} = t_{i,j} - \sum\limits_{k=i+1}^{j-1} u_{i,k}u_{k,j} & (1 \leqslant i < j \leqslant n) \end{cases}}$$

Je cherche à construire une solution U telle que $u_{i,i} + u_{j,j} \neq 0$ pour tous $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

En dessous de la diagonale : Pour $i > j$ dans $[\![1,n]\!]$, je pose $u_{i,j} = 0$ de sorte que U soit triangulaire supérieure

La diagonale : Soit $1 \leqslant i \leqslant n$, on a $t_{i,i} \in \mathbb{R}_*^-$, car $t_{i,i} \neq 0$ car T inversible

Si $t_{i,i} \notin \mathbb{R}^-$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, alors l'équation $z^2 = t_{i,i}$ admet deux solutions opposées telles de parties réelles non nulles

je choisis $u_{i,i}$ tel que $\mathrm{Re}(u_{i,i}) > 0$ et $u_{i,i}^2 = t_{i,i}$, il y a un seul choix possible en fonction de $t_{i,i}$.

Si $t_{i,i} \in \mathbb{R}^-$, alors l'équation $z^2 = t_{i,i}$ admet deux solutions opposées imaginaires pures non nulles

je choisis $u_{i,i}$ tel que $\mathrm{Im}(u_{i,i}) > 0$ si $u_{i,i}^2 = t_{i,i}$, il y a un seul choix possible en fonction de $t_{i,i}$.

Pour i, j dans $[\![1, ,]\!]n$, on aura bien $u_{i,i} + u_{j,j} \neq 0$ car par l'absurde, si on avait $u_{i,i} + u_{j,j} = 0$ alors $t_{i,i} = u_{i,i}^2 = u_{j,j}^2 = t_{j,j}$

Donc $u_{i,i} = u_{j,j}$ (par unique choix) donc $u_{i,i} = 0$ absurde par construction

Au dessus de la diagonale : On construit les $u_{i,j}$ pour $i < j$ par récurrence sur $j - i \in [\![0, n-1]\!]$ en s'assurant de la relation : $(u_{i,i} + u_{j,j})u_{i,j} = t_{i,j} - \sum\limits_{k=i+1}^{j-1} u_{i,k}u_{k,j}$

Pour l'initialisation, il n'y a rien à faire. (coefficients diagonaux)

Pour l'hérédité, soit $\sigma \in [\![0, n-2]\!]$ tel que tous les coefficients $u_{i,j}$, ont été définis pour tout $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ et $j - i \leqslant \sigma$

Soit $i, j \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $i \leqslant j$ et $j - i = \sigma + 1$

Je pose $u_{i,j} = \dfrac{t_{i,j} - \sum\limits_{k=i+1}^{j-1} u_{i,k}u_{k,j}}{u_{i,i} + u_{j,j}}$

Ce qui est possible car $u_{i,i}$, $u_{j,j}$, $u_{i,k}$ et $u_{k,j}$ pour $i+1 \leqslant k \leqslant j-1$ sont déjà définis en effet $k-i \leqslant j-i-1 \leqslant \sigma$ et $j - k \leqslant j - i - 1\sigma$

$$\boxed{\text{La matrice U ainsi construite est telle que } u_{i,i} + u_{j,j} \neq 0 \text{ pour tous } i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ et } \mathrm{U}^2 = \mathrm{T}}$$

5) Le polynôme caractéristique $\chi_{\mathrm{A}}[\mathrm{X}]$ est scindé dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ selon d'Alembert Gauss.

Donc A est trigonalisable, ce qui nous fournit $\mathrm{P} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible et T triangulaire supérieure telle que $\mathrm{A} = \mathrm{PTP}^{-1}$.

Comme A est inversible alors T l'est également, on peut donc appliquer la question précédente ce qui nous fournit $\mathrm{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{U}^2 = \mathrm{T}$

et ainsi $\mathrm{A} = \left(\mathrm{PUP}^{-1}\right)^2$ donc $\boxed{\text{A admet une racine carrée}}$

En outre, on suppose que les valeurs propres de A appartiennent à $\widetilde{\mathbb{C}}$.

Les valeurs propres de la racine carrée de A sont celles de T car elles sont semblables

La matrice triangulaire T a ses coefficients diagonaux dans $\widetilde{\mathbb{C}}$ car il s'agit de ses valeurs propres

alors en reprenant la construction précédente, les coefficients diagonaux de U sont de partie réelle strictement positive

Les valeurs propres de la racine carrée de A sont celles de U car U est semblable à PUP^{-1}

$\boxed{\text{Dans ce cas, A admet une racine carrée dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement positive}}$

C. Algorithme de Newton

6) On écrit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $\mathrm{B} = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On a donc $\mathrm{AB} = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$

Pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on a $0 \leqslant \left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \cdot |b_{k,j}|$ (inégalité triangulaire)

et selon Cauchy-Schwarz appliqué dans $\mathbb{R}^n$: $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \cdot |b_{k,j}|\right)^2 \leqslant \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|^2\right)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |b_{k,j}|^2\right)$

d'où $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}\right|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_{k,j}|^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|^2\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |b_{k,j}|^2\right)$

Comme $\sqrt{\cdot}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a $\boxed{\|\mathrm{AB}\| \leqslant \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\|}$

7) **une écriture du polynôme minimal :** On sait que les racines du polynôme minimal d'une matrice carrée sont les valeurs propres de cette matrice.

Comme $m_{\mathrm{A}} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ est scindé, on peut alors écrire

$$m_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})} (\mathrm{X} - \lambda)^{n_\lambda} \quad \text{avec} \quad \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}),\ n_\lambda \geqslant 1$$

l'équivalence demandée : D'après l'écriture précédente, on a $m_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})} (\mathrm{B} - \lambda \mathrm{I}_n)^{n_\lambda}$

d'où $m_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ est inversible si et seulement si $0 \neq \det(m_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})) = \displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})} \det\left(\mathrm{B} - \lambda \mathrm{I}_n\right)^{n_\lambda}$

ce qui équivaut à $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}),\ \chi_{\mathrm{B}}(\lambda) \neq 0$ ou encore $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}),\ \lambda \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{B})$

Ainsi $\boxed{\text{la matrice } m_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \text{ est inversible si et seulement si A et B n'ont aucune valeur propre commune}}$

l'implication demandée : On suppose qu'il existe une matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $\mathrm{AM} = \mathrm{MB}$.

On montre alors par récurrence immédiate que $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{A}^k\mathrm{M} = \mathrm{MB}^k$

Puis par combinaison linéaire, on obtient $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}],\ \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{M} = \mathrm{MP}(\mathrm{B})$

en particulier $0 = m_{\mathrm{A}}(\mathrm{A})\mathrm{M} = \mathrm{M}m_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ comme M est non nulle alors $m_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ n'est pas inversible

Par la contraposée de la réciproque de l'implication précédente, on a

$\boxed{\text{s'il existe } \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ non nulle telle que } \mathrm{AM} = \mathrm{MB}, \text{ alors A et B ont au moins une valeur propre commune}}$

8) On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{Sp}(\mathrm{B})$. Comme $\chi_{\mathrm{B}} = \chi_{\mathrm{B}^\top}$, on a $\lambda \in \mathrm{Sp}\left(\mathrm{B}^\top\right)$

Ceci nous fournit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, tel que $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$ et $\mathrm{B}^\top\mathrm{Y} = \lambda\mathrm{Y}$

On pose $\mathrm{M} = \mathrm{XY}^\top = (x_i y_j)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

On a $\mathrm{M} \neq 0$ car il existe i et $j \in [\![1, n]\!]$, tel que $x_i \neq 0$ et $y_j \neq 0$ et donc $x_i y_j \neq 0$

De plus $\mathrm{AM} = \mathrm{AXY}^\top = \lambda\mathrm{XY}^\top$ et $\mathrm{MB} = \mathrm{XY}^\top\mathrm{B} = \mathrm{X}\big(\mathrm{B}^\top\mathrm{Y}\big)^\top = \mathrm{X}(\lambda\mathrm{Y})^\top = \lambda\mathrm{XY}^\top$

$\boxed{\text{si A et B ont au moins une valeur propre commune, alors il existe } \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ non nulle telle que } \mathrm{AM} = \mathrm{MB}}$

9) On voit ici $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie ($2n^2$)

Soit $\mathrm{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a $\mathrm{F}(\mathrm{X} + \mathrm{H}) = (\mathrm{X} + \mathrm{H})^2 - \mathrm{A} = \mathrm{X}^2 + \mathrm{HX} + \mathrm{XH} + \mathrm{H}^2 - \mathrm{A} = \mathrm{F}(\mathrm{X}) + \mathrm{HX} + \mathrm{XH} + \mathrm{H}^2$

On a $\|\mathrm{H}^2\| \leqslant \|\mathrm{H}\|^2$ d'après 6 donc $\mathrm{H}^2 \underset{\mathrm{H} \to 0}{=} \mathrm{o}(\mathrm{H})$

Or l'application $\mathrm{H} \longmapsto \mathrm{HX} + \mathrm{XH}$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{F}(\mathrm{X} + \mathrm{H}) = \mathrm{F}(\mathrm{X}) + \mathrm{HX} + \mathrm{XH} + \underset{\mathrm{H} \to 0}{\mathrm{o}}(\mathrm{H})$

donc F est différentiable en X (donc sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$)

et $\boxed{\text{la différentielle } \mathrm{dF_X} \text{ de F en } \mathrm{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ est donnée par } \forall \mathrm{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \mathrm{dF_X}(\mathrm{H}) = \mathrm{XH} + \mathrm{HX}}$

Comme $\mathrm{dF_X}$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est de dimension finie

alors $\mathrm{dF_X}$ est inversible équivaut à $\mathrm{dF_X}$ injective c'est à dire $\forall \mathrm{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\},\ \mathrm{dF_X}(\mathrm{H}) \neq 0$

ainsi $\mathrm{dF_X}$ est inversible si et seulement si $\forall \mathrm{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\},\ \mathrm{HX} \neq (-\mathrm{X})\mathrm{H}$

à l'aide de 7 et 9, on a donc

$\boxed{\mathrm{dF_X} \text{ est inversible si et seulement si X et } -\mathrm{X} \text{ n'ont aucune valeur propre commune}}$

On suppose que X et $-\mathrm{X}$ n'ont aucune valeur propre commune

donc 0 n'est pas valeur propre de X

$\boxed{\text{Si } \mathrm{dF_X} \text{ est inversible, alors X est inversible}}$

10) Comme les valeurs propres de A sont dans $\widetilde{\mathbb{C}}$, leurs racines carrées ont des parties réelles non nulles.

Par construction en Q5, les valeurs propre de $\mathrm{X}^* = \sqrt{\mathrm{A}}$ ont des parties réelles strictement positives

donc les valeurs propre de $-\mathrm{X}^*$ ont des parties réelles strictement négatives car $\mathrm{Sp}(-\mathrm{X}^*) = \{-\lambda \mid \lambda \mathrm{Sp}(\mathrm{X}^*)\}$

donc X^* et $-\mathrm{X}^*$ n'ont aucune valeur propre commune

D'après $\boxed{\text{la question précédente que } \mathrm{dF_{X^*}} \text{ est inversible}}$

De plus l'application F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ car ces fonctions composantes sont polynomiales

donc comme F est de classe $\mathcal{C}^1$, ainsi sa différentielle $\mathrm{X} \longmapsto \mathrm{dF_X}$ est continue

par composition l'application $\varphi : \mathrm{X} \longmapsto \det(\mathrm{dF_X})$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vers $\mathbb{C}$

Or $\mathbb{C}^*$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ donc $\Omega = \{\mathrm{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \varphi(\mathrm{X}) \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en tant qu'image d'un ouvert par une application continue

Or comme $\mathrm{dF_{X^*}}$ est inversible, on a $\mathrm{X}^* \in \Omega$

Ce qui nous fournit $r > 0$, tel que $\forall \mathrm{X} \in \overline{\mathrm{B}}(\mathrm{X}^*, r),\ \varphi(\mathrm{X}) \neq 0$

$\boxed{\text{Il existe bien } r > 0 \text{ tel que } \mathrm{dF_X} \text{ soit inversible pour tout } \mathrm{X} \in \overline{\mathrm{B}}(\mathrm{X}^*, r)}$

11) On a $\mathrm{F}(\mathrm{X}^*) = (\mathrm{X}^*)^2 - \mathrm{A} = 0$ donc $\boxed{\mathrm{G}(\mathrm{X}^*) = \mathrm{X}^* - (\mathrm{dF_{X^*}})^{-1}(0) = \mathrm{X}^*}$

Soit $\mathrm{H} \in \mathrm{B}(0, r)$.

On a $\mathrm{dF_{X^*}} \circ (\mathrm{Id} + (\mathrm{dF_{X^*}})^{-1} \circ \mathrm{dF_H}) = \mathrm{dF_{X^*}} + \mathrm{dF_H}$

or $\forall \mathrm{Z} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $(\mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*} + \mathrm{dF}_{\mathrm{H}})(\mathrm{Z}) = \mathrm{X}^*\mathrm{Z} + \mathrm{Z}\mathrm{X}^* + \mathrm{HZ} + \mathrm{ZH} = (\mathrm{X}^* + \mathrm{H})\mathrm{Z} + \mathrm{Z}(\mathrm{X}^* + \mathrm{H}) = \mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*+\mathrm{H}}(\mathrm{Z})$
donc $\mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*+\mathrm{H}} = \mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*} \circ (\mathrm{Id} + (\mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*})^{-1} \circ \mathrm{dF}_{\mathrm{H}})$
or $\mathrm{X}^* + \mathrm{H} \in \mathrm{B}(\mathrm{X}^*, r)$, on peut donc passer à l'inverse d'après la question précédente ce qui donne

$$(\mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*+\mathrm{H}})^{-1} = (\mathrm{Id} + (\mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*})^{-1} \circ \mathrm{dF}_{\mathrm{H}})^{-1} \circ (\mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*})^{-1}$$

Par ailleurs $\mathrm{G}(\mathrm{X}^* + \mathrm{H}) = \mathrm{X}^* + \mathrm{H} - (\mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*+\mathrm{H}})^{-1}(\mathrm{F}(\mathrm{X}^* + \mathrm{H}))$
or $\mathrm{F}(\mathrm{X}^* + \mathrm{H}) = (\mathrm{X}^*)^2 + \mathrm{H}^2 + \mathrm{X}^*\mathrm{H} + \mathrm{H}\mathrm{X}^* - \mathrm{A} = \mathrm{H}^2 + \mathrm{X}^*\mathrm{H} + \mathrm{H}\mathrm{X}^*$ donc en utilisant la linéarité de $(\mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*+\mathrm{H}})^{-1}$, on a :

$$\mathrm{G}(\mathrm{X}^* + \mathrm{H}) - \mathrm{G}(\mathrm{X}^*) = \mathrm{H} - (\mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*+\mathrm{H}})^{-1}(\mathrm{H}^2 + \mathrm{X}^*\mathrm{H} + \mathrm{H}\mathrm{X}^*)$$

or $\mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*+\mathrm{H}}(\mathrm{H}) = (\mathrm{X}^* + \mathrm{H})\mathrm{H} + \mathrm{H}(\mathrm{X}^* + \mathrm{H}) = 2\mathrm{H}^2 + \mathrm{X}^*\mathrm{H} + \mathrm{H}\mathrm{X}^*$ et donc $\mathrm{H}^2 + \mathrm{X}^*\mathrm{H} + \mathrm{H}\mathrm{X}^* = \mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*+\mathrm{H}}(\mathrm{H}) - \mathrm{H}^2$
en utilisant la linéarité de $(\mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*+\mathrm{H}})^{-1}$ et $\left((\mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*+\mathrm{H}})^{-1} \circ \mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*+\mathrm{H}}\right)(\mathrm{H}) = \mathrm{H}$ on obtient :

$$\mathrm{G}(\mathrm{X}^* + \mathrm{H}) - \mathrm{G}(\mathrm{X}^*) = \mathrm{H} - (\mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*+\mathrm{H}})^{-1}\left(\mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*+\mathrm{H}}(\mathrm{H}) - \mathrm{H}^2\right) = \mathrm{H} - \mathrm{H} + (\mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*+\mathrm{H}})^{-1}(\mathrm{H}^2)$$

On a bien $\boxed{\text{pour tout } \mathrm{H} \in \mathrm{B}(0, r),\ \mathrm{G}(\mathrm{X}^* + \mathrm{H}) - \mathrm{G}(\mathrm{X}^*) = (\mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*+\mathrm{H}})^{-1}(\mathrm{H}^2)}$

12) Soit $\mathrm{H} \in \mathrm{B}(0, r)$. En utilisant les deux relations précédentes on a

$$\mathrm{G}(\mathrm{X}^* + \mathrm{H}) - \mathrm{G}(\mathrm{X}^*) = \left(\left(\mathrm{Id} + (\mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*})^{-1} \circ \mathrm{dF}_{\mathrm{H}}\right)^{-1} \circ (\mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*})^{-1}\right)(\mathrm{H}^2)$$

Je munis $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ d'une norme notée N, ce qui est possible car l'espace est de dimension finie.
Comme l'application $(\psi, \mathrm{X}) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longmapsto \psi(\mathrm{X})$, est bilinéaire donc continue car tous les espaces de dimension finie cela nous fournit $\mathrm{K}_1 > 0$, tel que

$$\forall (\psi, \mathrm{X}) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|\psi(\mathrm{X})\| \leqslant \mathrm{K}_1 \mathrm{N}(\psi) \cdot \|\mathrm{X}\|$$

de même il existe $\mathrm{K}_2 > 0$ tel que

$$\forall (\psi_1, \psi_2) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, \mathrm{N}(\psi_1 \circ \psi 2) \leqslant \mathrm{K}_2 \mathrm{N}(\psi_1) \cdot \mathrm{N}(\psi_2)$$

La différentielle dF est continue, donc $\mathrm{H} \longmapsto \mathrm{dF}_{\mathrm{H}}$ est continue sur $\overline{\mathrm{B}}(0, r)$
donc $\mathrm{H} \longmapsto \mathrm{Id} + (\mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*})^{-1} \circ \mathrm{dF}_{\mathrm{H}}$ est continue sur $\overline{\mathrm{B}}(0, r)$ à valeurs dans $\mathrm{GL}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$
car $\forall \mathrm{H} \in \overline{\mathrm{B}}(0, r)$, $\mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*+\mathrm{H}} \in \mathrm{GL}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ selon 10
De plus pour $p \in \mathbb{N}^*$, les applications det et $\mathrm{M} \mapsto (\mathrm{comm}(\mathrm{M}))^\top$ sont continues sur $\mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$) car polynomiales à valeurs respectivement dans $\mathbb{C}*$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
donc $\mathrm{M} \longmapsto \mathrm{M}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathrm{M})}(\mathrm{comm}(\mathrm{M}))^\top$ est continue sur $\mathrm{GL}p(\mathbb{C})$
Ainsi dans E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie, par composition par les isomorphismes qui associe endomorphismes et matrices via une base choisie l'application $\psi \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \longmapsto \psi^{-1}$ est continue
d'où par composition l'application $\mathrm{M} \longmapsto \left(\mathrm{Id} + (\mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*})^{-1} \circ \mathrm{dF}_{\mathrm{H}}\right)^{-1}$ est continue sur $\overline{\mathrm{B}}(0, r)$
comme $\overline{\mathrm{B}}(0, r)$ est compact en tant que fermé et borné en dimension finie ceci nous fournit $\mathrm{K}_3 > 0$ tel que

$$\forall \mathrm{H} \in \overline{\mathrm{B}}(0, r),\ \mathrm{N}\left(\left(\mathrm{Id} + (\mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*})^{-1} \circ \mathrm{dF}_{\mathrm{H}}\right)^{-1}\right) \leqslant \mathrm{K}_3$$

donc pour $\mathrm{H} \in \mathrm{B}(0, r) \subset \overline{\mathrm{B}}(0, r)$, on a en utilisant la question 6,

$$\|\mathrm{G}(\mathrm{X}^* + \mathrm{H}) - \mathrm{G}(\mathrm{X}^*)\| = \mathrm{K}_1\mathrm{K}_2\mathrm{K}_3\mathrm{N}\left((\mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*})^{-1}\right)\|\mathrm{H}^2\| \leqslant \mathrm{K}_1\mathrm{K}_2\mathrm{K}_3\mathrm{N}\left((\mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*})^{-1}\right)\|\mathrm{H}\|^2$$

On a $\mathrm{N}\left((\mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*})^{-1}\right) > 0$ car $(\mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*})^{-1}$ est inversible. En prenant $\mathrm{C} = \mathrm{K}_1\mathrm{K}_2\mathrm{K}_3\mathrm{N}\left((\mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*})^{-1}\right)$
on a $\boxed{\mathrm{C} > 0 \text{ et pour tout X de } \mathrm{B}(\mathrm{X}^*, r), \text{ on a l'inégalité } \|\mathrm{G}(\mathrm{X}) - \mathrm{X}^*\| \leqslant \mathrm{C}\|\mathrm{X} - \mathrm{X}^*\|^2}$

13) Le résultat semble faux (par exemple pour $k=0$)

Je choisis de montrer l'inégalité $\|X_k - X^*\| \leqslant \dfrac{(\rho C)^{2^k}}{C}$

Je prends $\rho = \min\left(r, \frac{1}{C}\right)$. Ainsi $C\rho^2 \leqslant \rho \leqslant r$ et on a $B(X^*,\rho) \subset B(X^*,r)$,

Soit $X_0 \in B(X^*,\rho)$.

On va montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que :

$$\mathcal{P}_k : X_k \text{ est bien défini, } X_k \in B(X^*,\rho) \text{ et } \|X_k - X^*\| \leqslant \frac{(\rho C)^{2^k}}{C}$$

Initialisation : On a bien X_0 est bien défini et $X_0 \in B(X^*,\rho)$

De plus On a $\|X_0 - X^*\| \leqslant \rho = \frac{(\rho C)^{2^0}}{C}$

Ainsi l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que X_k est bien défini, $X_k \in B(X^*,\rho)$ et $\|X_k - X^*\| \leqslant \dfrac{(\rho C)^{2^k}}{C}$.

On a d'après 11., comme G est définie sur $\overline{B}(X^*,r)$, on a $X_{k+1} = G(X_k)$ est défini car $B(X^*,\rho) \subset \overline{B}(X^*,r)$

Puis d'après 12., on a $\|X_{k+1} - X^*\| \leqslant C\|X_k - X^*\|^2$

or $\|X_k - X^*\| \leqslant \rho$ donc $\|X_{k+1} - X^*\| \leqslant C\rho^2 \leqslant \rho$

ainsi $X_{k+1} \in B(X^*,\rho)$

et $\|X_{k+1} - X^*\| \leqslant C\|X_k - X^*\|^2 \leqslant C\dfrac{(\rho C)^{2\times 2^k}}{C^2} = \dfrac{(\rho C)^{2^{k+1}}}{C}$

ce qui termine l'hérédité

Conclusion On a montré par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_k$ est vraie

ainsi il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $X_0 \in B(X^*,\rho)$ la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit bien définie et vérifie, et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|X_k - X^*\| \leqslant \frac{(\rho C)^{2^k}}{C}$$

En imposant de plus $\rho < 1/C$, la suite (X_k) converge vers X^*

D. Forme équivalente

14) On suppose que la suite (X_k) est bien définie par (**N**).

On a $X_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. et pour $k \in \mathbb{N}$, on a $X_{k+1} = X_k - (dF_{X_k})^{-1}(F(X_k))$

Si je note $H_k = -(dF_{X_k})^{-1}(F(X_k)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

on a $X_{k+1} = X_k + H_k$ et $dF_{X_k}(H_k) = -F(X_k)$ d'où $X_kH_k + H_kX_k = A - X_k^2$

Ceci prouve l'existence d'une suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par (**I**)

Je considère maintenant une suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par (**I**).

Je vais montrer par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $U_k = X_k$

Initialisation : On a bien $U_0 = X_0$

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $U_k = X_k$.

On a dF_{U_k} inversible car $X_{k+1} = U_k - (dF_{U_k})^{-1}(F(U_k))$

En posant $H_k = -(dF_{U_k})^{-1}(F(U_k))$ on vérifie que $U_kH_k + H_kU_k = A - U_k^2$

de sorte que $U_{k+1} = U_k + H_k = X_k - (dF_{X_k})^{-1}(F(X_k)) = X_{k+1}$

Conclusion On a bien $\forall k \in \mathbb{N}$, $U_k = X_k$

Ainsi on a bien l'existence et l'unicité d'une suite $(\mathrm{U}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par (**I**) vérifiant $\mathrm{U}_0 = \mathrm{X}_0$

$\boxed{\text{Si } (\mathrm{X}_k) \text{ est bien définie par } (\mathbf{N}) \text{ et } \mathrm{U}_0 = \mathrm{X}_0, \text{ alors } (\mathrm{U}_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie par } (\mathbf{I}) \text{ et égale à } (\mathrm{X}_k)_{k\in\mathbb{N}}}$

On suppose que la suite $(\mathrm{U}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie par (**I**) et $\mathrm{X}_0 = \mathrm{U}_0$

Alors on peut procéder de manière analogue pour montrer l'existence et l'unicité de la suite (X_k)

Soit $k \in \mathbb{N}$. Le point qui diffère ici est de justifier le fait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{dF}_{\mathrm{U}_k}$ est inversible.

Comme la suite U_{k+1} est bien définie par (**I**), alors l'énoncé donne implicitement qu'il existe une unique H_k tel que $\mathrm{U}_k\mathrm{H}_k + \mathrm{H}_k\mathrm{U}_k = \mathrm{A} - \mathrm{U}_k^2$

donc $\mathrm{A} - \mathrm{U}_k^2$ admet un unique antécédent par $\mathrm{dF}_{\mathrm{U}_k}$

or par l'absurde si l'endomorphisme $\mathrm{dF}_{\mathrm{U}_k}$ n'était pas inversible,

l'ensemble d'antécédents : $(\mathrm{dF}_{\mathrm{U}_k})^{-1}\left(\left\{\mathrm{A} - \mathrm{U}_k^2\right\}\right)$ serait vide ou bien un sous-espace affine de direction $\operatorname{Ker}(\mathrm{dF}_{\mathrm{U}_k})$

donc de cardinal nul ou infini (et non pas un)

Ceci étant absurde on a bien $\mathrm{dF}_{\mathrm{U}_k}$ inversible, ce qui permet de conclure

$\boxed{\text{si } (\mathrm{U}_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie par } (\mathbf{I}) \text{ et } \mathrm{X}_0 = \mathrm{U}_0, \text{ alors la suite } (\mathrm{X}_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie par } (\mathbf{N}) \text{ et égale à } (\mathrm{U}_k)_{k\in\mathbb{N}}}$

15) Comme les suites (U_k) et (X_k) sont bien définies et égales alors U_k est inversible pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Je considère alors la suite (G_k) définie par $\mathrm{G}_k = \frac{1}{2}(\mathrm{U}_k^{-1}\mathrm{A} - \mathrm{U}_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On va montrer par récurrence sur k, la propriété $\mathcal{P}_k$:

$$\mathrm{V}_k \text{ est bien définie, } \mathrm{G}_k = \mathrm{H}_k,\ \mathrm{V}_k\mathrm{A} = \mathrm{A}\mathrm{V}_k \text{ et } \mathrm{V}_k = \mathrm{U}_k$$

Initialisation : $\mathrm{U}_0 = \mathrm{V}_0$ commute avec A

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_k$.

Ainsi $\mathrm{V}_{k+1} = \frac{1}{2}(\mathrm{V}_k + \mathrm{V}_k^{-1}\mathrm{A})$ est une matrice bien définie car $\mathrm{V}_k = \mathrm{U}_k$ est inversible

De plus $\mathrm{V}_k\mathrm{A} = \mathrm{A}\mathrm{V}_k$, on a ainsi $\mathrm{A}\mathrm{V}_k^{-1} = \mathrm{V}_k^{-1}\mathrm{A}$ puis $\mathrm{V}_{k+1}\mathrm{A} = \mathrm{A}\mathrm{V}_{k+1}$

On remarque que $\mathrm{U}_k\mathrm{G}_k + \mathrm{G}_k\mathrm{U}_k = \mathrm{A} - \mathrm{U}_k^2$ car $\mathrm{U}_k = \mathrm{V}_k$ et A commutent

donc $\mathrm{G}_k = \mathrm{H}_k = \mathrm{U}_{k+1} - \mathrm{U}_k$

Et $\mathrm{V}_{k+1} = \frac{1}{2}(\mathrm{V}_k + \mathrm{V}_k^{-1}\mathrm{A}) = \mathrm{V}_k + \mathrm{G}_k = \mathrm{U}_k + \mathrm{H}_k = \mathrm{U}_{k+1}$

ce qui prouve $\mathcal{P}_{k+1}$

Conclusion : On a montré par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_k$.

$\boxed{\text{la suite } (\mathrm{V}_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie par } (\mathbf{II}) \text{ et pour tout } k \in \mathbb{N},\ \mathrm{U}_k = \mathrm{V}_k \text{ commute avec A}}$

16) D'après l'énoncé la suite (V_k) est bien définie.

On fait une démonstration par récurrence.

Initialisation On a bien $\mathrm{V}_0 = \mu\mathrm{I}_n$ symétrique définie positive car $\mu > 0$ et $e_1, \ldots, e_n$ sont des vecteurs propres de V_0

Hérédité Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que V_k est symétrique définie positive et $e_1, \ldots, e_n$ sont des vecteurs propres de V_k.

On a $\mathrm{V}_{k+1}e_\ell = \frac{1}{2}(\mathrm{V}_k e_\ell + \mathrm{V}_k^{-1}\mathrm{A}e_\ell) = \frac{1}{2}(\lambda_{k,\ell}e_\ell + \lambda_k\mathrm{V}_k^{-1}e_\ell) = \frac{1}{2}\left(\lambda_{k,\ell} + \frac{\lambda_k}{\lambda_{k,\ell}}\right)e_i$

or $\lambda_{k,\ell}e_\ell = \mathrm{V}_k e_\ell$ et $\lambda_{k,\ell} > 0$

Comme $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base, on a $\operatorname{Sp}(\mathrm{V}_{k+1}) = \left\{\frac{1}{2}\left(\lambda_{k,i} + \frac{\lambda_k}{\lambda_{k,i}}\right) \mid i \in [\![1, n]\!]\right\} \subset]0, +\infty[$

De plus ${\mathrm{V}_{k+1}}^\top = \left(\frac{1}{2}(\mathrm{V}_k^{-1}\mathrm{A} + \mathrm{V}_k)\right)^\top = \frac{1}{2}\left(\left(\mathrm{V}_k^{-1}\right)^\top\mathrm{A}^\top + {\mathrm{V}_k}^\top\right) = \frac{1}{2}\left(\left({\mathrm{V}_k}^\top\right)^{-1}\mathrm{A} + \mathrm{V}_k\right) = \mathrm{V}_{k+1}$

Ainsi V_{k+1} est symétrique définie positive et $e_1, \ldots, e_n$ sont des vecteurs propres de V_{k+1}

Conclusion on a montré par récurrence que pour tout $k \in$ ‘$\mathbb{N}$:

$$\boxed{\mathrm{V}_k \text{ est symétrique réelle définie positive de vecteurs propres } e_1, \ldots, e_n \text{ et } \lambda_{\ell+1,i} = \frac{\lambda_{\ell,i}}{2} + \frac{\lambda_\ell}{2\lambda_{\ell,i}}}$$

17) On va montrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a la propriété $\mathcal{H}_p$: $\dfrac{\lambda_{p,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{p,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}} = \left(\dfrac{\mu - \sqrt{\lambda_\ell}}{\mu + \sqrt{\lambda_\ell}}\right)^{2^p}$

Initialisation : On a $\lambda_{0,\ell} = \mu$ et $2^0 = 1$ donc $\dfrac{\lambda_{0,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{0,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}} = \left(\dfrac{\mu - \sqrt{\lambda_\ell}}{\mu + \sqrt{\lambda_\ell}}\right)^{2^0}$

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_k$.

On a $\lambda_{k+1,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell} = \dfrac{\lambda_{\ell,i}^2 + \lambda_\ell - 2\lambda_{\ell,i}\sqrt{\lambda_\ell}}{2\lambda_{\ell,i}} = \dfrac{\left(\lambda_{\ell,i} - \sqrt{\lambda_\ell}\right)^2}{2\lambda_{\ell,i}}$

et de même $\lambda_{k+1,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell} = \dfrac{\left(\lambda_{\ell,i} + \sqrt{\lambda_\ell}\right)^2}{2\lambda_{\ell,i}}$

Comme $\lambda_{k+1,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell} > 0$ par somme, on a

$$\frac{\lambda_{k+1,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{k+1,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}} = \left(\frac{\lambda_{k,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{k,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}}\right)^2$$

Ainsi $\dfrac{\lambda_{k+1,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{k+1,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}} = \left(\dfrac{\mu - \sqrt{\lambda_\ell}}{\mu + \sqrt{\lambda_\ell}}\right)^{2^{k+1}}$

Conclusion : On a établi notre propriété par récurrence.

Ainsi comme $k+1 \in \mathbb{N}$, on a bien

$$\boxed{\frac{\lambda_{k+1,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{k+1,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}} = \left(\frac{\mu - \sqrt{\lambda_\ell}}{\mu + \sqrt{\lambda_\ell}}\right)^{2^{k+1}}}$$

18) On a $\left|\mu - \sqrt{\lambda_\ell}\right| < \mu + \sqrt{\lambda_\ell}$ car $\mu > 0$ et $\sqrt{\lambda_\ell} > 0$ Ainsi $\left|\frac{\mu - \sqrt{\lambda_\ell}}{\mu + \sqrt{\lambda_\ell}}\right| < 1$

Je note $u_k = \left(\frac{\mu - \sqrt{\lambda_\ell}}{\mu + \sqrt{\lambda_\ell}}\right)^{2^k}$. On a donc $\dfrac{\lambda_{k,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{k,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}} = u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ car $2^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$

donc $\lambda_{k,\ell}(1 - u_k) = \sqrt{\lambda_\ell}(1 + u_k)$

Comme $1 - u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, pour k assez grand on a $1 - u_k \neq 0$

d'où $\lambda_{k,\ell} = \sqrt{\lambda_\ell}\dfrac{1 + u_k}{1 - u_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \sqrt{\lambda_\ell}$

Je note $\Delta_k = \operatorname{diag}(\lambda_{1,k}, \dots, \lambda_{n,k})$

en regardant le limite coefficients par coefficients, on a $\Delta_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\right)$

Je note $\delta = \operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\right)$

Je remarque que $\mathrm{P}\Delta_k\mathrm{P}^\top = \mathrm{V}_k$

Comme l'application $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \mathrm{PMP}^\top$ est linéaire en dimension finie, cette application est continue.

donc $\mathrm{P}\Delta_k\mathrm{P}^\top = \mathrm{V}_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{P}\delta\mathrm{P}^\top$

Il est clair que la matrice $\mathrm{P}\delta\mathrm{P}^\top$ est symétrique à valeurs propres strictement positives

De plus $\left(\mathrm{P}\delta\mathrm{P}^\top\right)^2 = \mathrm{P}\delta\mathrm{P}^\top\mathrm{P}\delta\mathrm{P}^\top = \mathrm{P}\delta^2\mathrm{P}^\top = \mathrm{PDP}^\top = \mathrm{A}$

Ainsi $\mathrm{P}\delta\mathrm{P}^\top = \sqrt{\mathrm{A}}$ donc $\boxed{\text{la suite } (\mathrm{V}_k) \text{ converge vers } \sqrt{\mathrm{A}}}$

E. Stabilité

19) On sait que V_0 est inversible donc

$$(\mathrm{V}_0 + \Delta)\left(\mathrm{V}_0^{-1} - \mathrm{V}_0^{-1}\Delta\mathrm{V}_0^{-1}\right) = \mathrm{I}_n - \Delta\mathrm{V}_0^{-1} + \Delta\mathrm{V}_0^{-1} - \Delta\mathrm{V}_0^{-1}\Delta\mathrm{V}_0^{-1} = \mathrm{I}_n - \Delta\mathrm{V}_0^{-1}\Delta\mathrm{V}_0^{-1}$$

Ainsi $(\mathrm{V}_0+\Delta)\left(\mathrm{V}_0^{-1}-\mathrm{V}_0^{-1}\Delta\mathrm{V}_0^{-1}\right)=\mathrm{I}_n-\varepsilon^2\sqrt{\mathrm{A}}^{-1}\mathrm{C}_i\mathrm{C}_j^\top\sqrt{\mathrm{A}}^{-1}\mathrm{C}_i\mathrm{C}_j^\top$

Or $\sqrt{\mathrm{A}}\mathrm{C}_i=\sqrt{\lambda_i}\mathrm{C}_i$ donc $\sqrt{\mathrm{A}}^{-1}\mathrm{C}_i=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\mathrm{C}_i$

donc $(\mathrm{V}_0+\Delta)\left(\mathrm{V}_0^{-1}-\mathrm{V}_0^{-1}\Delta\mathrm{V}_0^{-1}\right)=\mathrm{I}_n-\dfrac{\varepsilon^2}{\lambda_i}\mathrm{C}_i\mathrm{C}_j^\top\mathrm{C}_i\mathrm{C}_j^\top$

Comme P est orthogonale, ses colonnes forment une base orthonormée et ainsi $\mathrm{C}_j^\top\mathrm{C}_i=0$
d'où $(\mathrm{V}_0+\Delta)\left(\mathrm{V}_0^{-1}-\mathrm{V}_0^{-1}\Delta\mathrm{V}_0^{-1}\right)=\mathrm{I}_n$ ce qui prouve que

$\mathrm{V}_0+\Delta$ est inversible et $\boxed{(\mathrm{V}_0+\Delta)^{-1}=\mathrm{V}_0^{-1}-\mathrm{V}_0^{-1}\Delta\mathrm{V}_0^{-1}}$

On a $2\Delta_1=2\widehat{\mathrm{V}_1}-2\mathrm{V}_1=\widehat{\mathrm{V}_0}+\widehat{\mathrm{V}_0}^{-1}\mathrm{A}-\mathrm{V}_0-\mathrm{V}_0^{-1}\mathrm{A}=\Delta+(\mathrm{V}_0+\Delta)^{-1}\mathrm{A}-\mathrm{V}_0^{-1}\mathrm{A}$
or $\mathrm{V}_0^{-1}\mathrm{A}=\sqrt{\mathrm{A}}^{-1}\sqrt{\mathrm{A}}^2=\sqrt{\mathrm{A}}=\mathrm{V}_0$ et avec l'égalité
on a $2\Delta_1-\Delta=\mathrm{V}_0^{-1}\mathrm{A}-\mathrm{V}_0^{-1}\Delta\mathrm{V}_0^{-1}\mathrm{A}-\mathrm{V}_0=\mathrm{V}_0-\mathrm{V}_0-\mathrm{V}_0^{-1}\Delta\mathrm{V}_0^{-1}\mathrm{A}$

On a bien $\boxed{\Delta_1=\frac{1}{2}(\Delta-\mathrm{V}_0^{-1}\Delta\mathrm{V}_0^{-1}\mathrm{A})}$

20) On a $\Delta_1=\dfrac{1}{2}\Delta-\dfrac{1}{2}\mathrm{V}_0^{-1}\Delta\mathrm{V}_0^{-1}\mathrm{A}=\dfrac{1}{2}\Delta-\dfrac{\varepsilon}{2}\mathrm{V}_0^{-1}\mathrm{C}_i\mathrm{C}_j^\top\mathrm{V}_0=\dfrac{1}{2}\Delta-\dfrac{\varepsilon}{2}\mathrm{V}_0^{-1}\mathrm{C}_i(\mathrm{C}_j\mathrm{V}_0)^\top$

donc $\Delta_1=\dfrac{1}{2}\Delta-\dfrac{\varepsilon\sqrt{\lambda_j}}{2\sqrt{\lambda_i}}\mathrm{C}_i\mathrm{C}_j^\top$

On trouve alors $\Delta_1=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\sqrt{\lambda_j}}{\sqrt{\lambda_i}}\right)\Delta$

On remarque que par récurrence $\forall k\in\mathbb{N}$, $\mathrm{V}_k=\sqrt{\mathrm{A}}$ car $\sqrt{\mathrm{A}}^{-1}\mathrm{A}=\sqrt{\mathrm{A}}$
On peut alors montrer par récurrence que la suite $\left(\widehat{\mathrm{V}_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que

$$\boxed{\text{en prenant } \eta=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{\lambda_j}}{\sqrt{\lambda_i}}\right)\text{, on a } \forall k\in\mathbb{N},\ \widehat{\mathrm{V}_k}=\sqrt{\mathrm{A}}+\eta^k\Delta}$$

21) On a $\dfrac{\sqrt{\lambda_j}}{\sqrt{\lambda_i}}\leqslant\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_1}}=\gamma$ où γ désigne le conditionnement

La suite $(\widehat{\mathrm{V}_k})_{k\geqslant 0}$ converge si et seulement si $-1<\eta<1$.

or $\dfrac{1}{2}\geqslant\eta\geqslant\dfrac{1-\sqrt{\gamma}}{2}$

donc si $\gamma<9$ alors $\dfrac{1-\sqrt{\gamma}}{2}>\dfrac{1-\sqrt{9}}{2}=-1$

$\boxed{\text{Si le conditionnement est inférieur strictement à 9, la suite } (\widehat{\mathrm{V}_k})_{k\geqslant 0} \text{ converge}}$ (condition suffisante)