Correction

d'après ESC Lyon 1994

1.a f est définie sur $\mathbb{R}^+$.

Par opérations, f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec $f'(x)=\dfrac{1-x}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-x/2}$.

Quand $x\to 0^+$, $f'(x)\to+\infty$. Par suite f n'est pas dérivable en 0 mais f y présente une tangente verticale.

1.b Puisque $f'(x)$ est du signe de $1-x$:

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1/\sqrt{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

.

1.c f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f''(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{4x\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-x/2}$ du signe de x^2-2x-1.

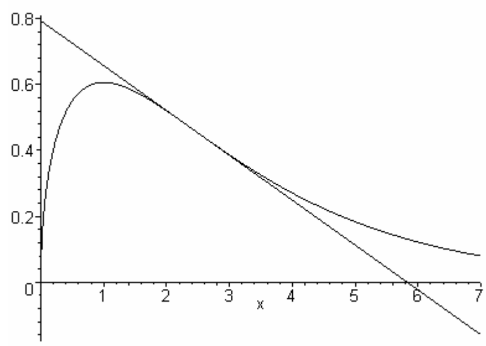
x	0		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-2x-1		$-$	0	$+$	

donc f présente un point d'inflexion en $\alpha=1+\sqrt{2}$.

1.d L'équation de la tangente à f en α est $y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$.

Celle-ci intercepte l'axe des abscisses en $x=\alpha-\dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}=\alpha+\dfrac{2\alpha}{\alpha-1}=1+\sqrt{2}+2\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$.

1.e Ci-contre



2.a f est continue et strictement croissante sur $[0,1]$ (car $f'(x)>0$ sur $]0,1[$) donc f réalise une bijection de $[0,1]$ vers $[f(0),f(1)]=\left[0,1/\sqrt{\mathrm{e}}\right]$. De plus, par théorème, sont application réciproque est continue.

2.b φ a même monotonie que f et est donc strictement croissante. De plus $f(0)=0$ et $f(1)=1/\sqrt{\mathrm{e}}$ donne $\varphi(0)=0$ et $\varphi(1/\sqrt{\mathrm{e}})=1$.

Par suite

x	0		$1/\sqrt{\mathrm{e}}$
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$	1

.

2.c f est dérivable sur $]0,1[$ et $\forall x\in]0,1[, f'(x)\neq 0$ donc φ est dérivable sur $f(]0,1[)=\left]0,1/\sqrt{\mathrm{e}}\right[$.

2.d Etude en 0 : $\dfrac{1}{h}(\varphi(h)-\varphi(0))\underset{x=\varphi(h)}{=}\dfrac{x}{f(x)}=\sqrt{x}\mathrm{e}^{x/2}$.

Quand $h\to 0$, on a $x=\varphi(h)\to\varphi(0)=0$ puis $\sqrt{x}\mathrm{e}^{x/2}\to 0$. Ainsi φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0)=0$.

Etude en $\beta=1/\sqrt{\mathrm{e}}$: $\dfrac{1}{h}(\varphi(\beta+h)-\varphi(\beta))\underset{x=\varphi(\beta+h)}{=}\dfrac{x-1}{f(x)-f(1)}$.

Quand $h\to 0$, $x=\varphi(\beta+h)\to\varphi(\beta)=1$, donc $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\to f'(1)=0$ et puisque f est strictement croissante, on peut même dire $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\to 0^+$ d'où $\dfrac{x-1}{f(x)-f(1)}\to+\infty$.

Finalement φ n'est pas dérivable en $1/\sqrt{\mathrm{e}}$ mais y présente une tangente verticale.

2.e On a $f(\varphi(x)) = x$ donc $2\sqrt{\varphi(x)}\mathrm{e}^{-\varphi(x)/2} = x$. Quand $x \to 0$, on a $\varphi(x) \to \varphi(0) = 0$ donc $\mathrm{e}^{-\varphi(x)/2} \to 1$.

Par suite $2\sqrt{\varphi(x)} \sim x$ puis après élévation au carré : $\varphi(x) \sim \dfrac{x^2}{4}$.

3.a f est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$, elle réalise donc une bijection de $[1,+\infty[$ vers $\left]\lim\limits_{+\infty} f, f(1)\right] = \left]0, 1/\sqrt{\mathrm{e}}\right]$.

3.b ψ est continue et strictement décroissante et puisqu'elle réalise une bijection de $\left]0, 1/\sqrt{\mathrm{e}}\right]$ vers $[1,+\infty[$

on peut affirmer : $[1,+\infty[= \left[\psi(1/\sqrt{\mathrm{e}}), \lim\limits_{0} \psi\right[$. Par suite

x	0	$1/\sqrt{\mathrm{e}}$
$\psi(x)$	$+\infty$ $\searrow$	1

.

3.c Quand $x \to 0$, on a $\psi(x) \to +\infty$.

$f(\psi(x)) = x$ donne $\sqrt{\psi(x)}\mathrm{e}^{-\psi(x)/2} = x$ d'où $\dfrac{1}{2}\ln\psi(x) - \dfrac{1}{2}\psi(x) = \ln x$.

Puisque $\psi(x) \to +\infty$, on a $\ln\psi(x) = o(\psi(x))$ donc $\dfrac{1}{2}\ln\psi(x) - \dfrac{1}{2}\psi(x) \sim -\dfrac{1}{2}\psi(x)$.

Par suite $\psi(x) \sim -2\ln x$.

4. φ est croissante et ψ^{-1} décroissante donc g est décroissante. $g(1) = \varphi \circ \psi^{-1}(1) = \varphi(1/\sqrt{\mathrm{e}}) = 1$.

$\lim\limits_{+\infty} \psi^{-1} = \lim\limits_{+\infty} f = 0$ et $\lim\limits_{0} \varphi = 0$ donc par composition : $\lim\limits_{+\infty} g = 0$. On résume :

x	1	$+\infty$
$g(x)$	1 $\searrow$	0

.