ÉCOLE POLYTECHNIQUE – ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2012 FILIÈRE MP

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – A – (XLC)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Représentations de dimension finie de l'algèbre de Lie de $\mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$

Notations

Lorsque n est un entier positif non nul, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices à n lignes et n colonnes dont les coefficients sont des éléments de $\mathbb{C}$. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On munit cet espace de la norme subordonnée

$$|||A||| = \sup_{X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{||AX||_2}{||X||_2},$$

où $||X||_2$ est la norme hermitienne de X dans $\mathbb{C}^n$, identifié à l'espace des vecteurs colonnes : si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, alors $||X||_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note ${}^t\!A$ la matrice transposée de A, et $\bar{A}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués dans $\mathbb{C}$ des coefficients de A. On note $\mathrm{Tr}(A)$ la trace de A et $\det(A)$ le déterminant de A. On rappelle que les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de déterminant non nul forment un groupe multiplicatif, que l'on note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $[A, B] = AB - BA$.

On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant ${}^t\!A + \bar{A} = 0$ et $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

On note $\mathrm{U}(2, \mathbb{C})$ l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant ${}^t\!A\bar{A} = I_2$, et $\mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$ le sous-ensemble de $\mathrm{U}(2, \mathbb{C})$ formé des matrices dont le déterminant est égal à 1.

Première partie

1a. Dans cette question, $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est vu comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Quelle est sa dimension ? Montrer que $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 3 dont une base est formée par (E, F, G) avec

$$E = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad , \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad G = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

1b. Calculer $[E, F]$, $[F, G]$ et $[G, E]$ en fonction de E, F et G.

2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on rappelle que l'exponentielle de A est la matrice à coefficients complexes donnée par la formule

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

2a. Justifier la convergence de cette série.

2b. Montrer que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et P matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P.$$

2c. Montrer que si A est une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de coefficients diagonaux $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, alors $\exp(A)$ est une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de coefficients diagonaux $e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}$.

2d. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$.

Deuxième partie

3. Montrer que $\mathrm{U}(2, \mathbb{C})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, et que $\mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$ est un sous-groupe de $\mathrm{U}(2, \mathbb{C})$.

4. Montrer que les éléments de $\mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$ sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, avec $a, b \in \mathbb{C}$ et $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

5. Soient $M \in \mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$, $X \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $MX = \lambda X$.

5a. Montrer que $|\lambda| = 1$.

5b. Soit $Y \in \mathbb{C}^2$. Montrer que si ${}^t\!X\overline{Y} = 0$, alors ${}^t\!X\overline{M}\,\overline{Y} = 0$.

6a. Montrer que toute matrice de $\mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$ s'écrit sous la forme

$$P^{-1} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} P,$$

avec $P \in \mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

6b. Montrer que si $R, S \in \mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$, il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes :

i) $\mathrm{Tr}(R) = \mathrm{Tr}(S)$;

ii) il existe $P \in \mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$ tel que $R = P^{-1}SP$.

7a. Soit $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$; on suppose que $[A, B] = 0$. Montrer que

$$|||\sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!}(A+B)^\ell - (\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}A^j)(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}B^k)|||$$

tend vers zéro quand $n \to +\infty$. En déduire que $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.

7b. Montrer que l'image de $\mathcal{L}$, par l'application $\exp : A \mapsto \exp(A)$, est contenue dans $\mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$.

7c. Montrer que l'application $\exp : \mathcal{L} \to \mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$ est surjective.

7d. L'application $\exp : \mathcal{L} \to \mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$ est-elle injective ?

8. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$ tel que pour tout $P \in \mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$ et tout $g \in G$, on ait $P^{-1}gP \in G$. On suppose de plus que G contient au moins un élément différent de I_2 et de $-I_2$.

8a. Montrer que G contient au moins un élément de la forme $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

8b. Lorsque $A \in \mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$ est donnée sous la forme indiquée à la question **4.**, calculer les coefficients diagonaux de $A \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$ en fonction de θ et de $|a|$.

8c. Montrer que $\bigcup_{g \in G}\{\mathrm{Tr}(g)\}$ contient un intervalle de la forme $[2 - \delta, 2]$ avec $\delta > 0$.

9. Montrer que $G = \mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$. *On dit que le groupe* $\mathrm{SU}(2, \mathbb{C})/\{\pm I_2\}$ *est simple.*

Troisième partie

On se donne un espace vectoriel $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{C}$ de dimension finie, et des endomorphismes non nuls e, f, g de $\mathcal{E}$ tels que

$$e \circ f - f \circ e = -2g \quad ; \quad f \circ g - g \circ f = -2e \quad ; \quad g \circ e - e \circ g = -2f.$$

On note $w = f - ig$ et $z = f + ig$.

10. Calculer

$$e \circ z - z \circ e, \quad e \circ w - w \circ e, \quad z \circ w - w \circ z.$$

11. Soit v un vecteur propre de e, associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $k \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe $\mu_k \in \mathbb{C}$ tel que

$$e\left(z^k(v)\right) = \mu_k z^k(v).$$

12. Montrer qu'il existe un vecteur propre v_0 de e, associé à une valeur propre $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, et tel que $z(v_0) = 0$.

13. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $v_k = w^k(v_0)$. Calculer $e(v_k)$ en fonction de k, λ_0 et v_k. Calculer $z(v_k)$ en fonction de k, λ_0 et v_{k-1}.

14a. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que v_{n+1} soit nul et $v_0, \ldots, v_n$ soient linéairement indépendants.

14b. On suppose que $n \geq 1$. Montrer que pour $k = 1, \ldots, n-1$, on a

$$e(v_k) = i(n-2k)v_k \quad , \quad z(v_k) = -4k(n-k+1)v_{k-1} \quad , \quad w(v_k) = v_{k+1},$$

et d'autre part

$$e(v_0) = in\,v_0 \quad , \quad z(v_0) = 0 \quad , \quad w(v_0) = v_1,$$

$$e(v_n) = -in\,v_n \quad , \quad z(v_n) = -4n\,v_{n-1} \quad , \quad w(v_n) = 0.$$

* *
*