$\boxed{\textbf{Exercice 1 :}}$

Soit $(G, .)$ un groupe.

Définition : On appelle **centre** de G, qu'on note **Z(G)**, la partie de G définie par

$$Z(G) = \{x \in G \mid \forall g \in G,\ gx = xg\}$$

1) Montrer que Z(G) est un sous-groupe de G.

2) Soit $n > 1$. Déterminer le centre de $GL_n(\mathbb{K})$.

1) $x \in Z(G) \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} (\forall g \in G,\ gx = xg)$

2) $A \in Z(GL_n(\mathbb{K})) \Longleftrightarrow \forall M \in GL_n(\mathbb{K}),\ AM = MA$

$\Rightarrow \forall i, j,\ A(I_n + E_{ij}) = (I_n + E_{ij})A$

$\Rightarrow \ \dots$

Exercice 2 :

Quels sont les sous-groupes finis de $\mathbb{C}^*$?

Soit H un s-gr fini de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Notons $n = \mathrm{Card}(H)$.

On a : $(\forall z \in H, z^n = 1)$

Exercice 3 :
Soient $(G, .)$ un groupe multiplicatif et L un sous-groupe, avec $L \neq G$.
Déterminer $< \overline{L} >$, le sous-groupe engendré par le complémentaire de L.

$\langle \overline{L} \rangle$ contient $\overline{L}$.

Il contient aussi L ; en effet :

Soit $l \in L$. Mq que $l \in \langle \overline{L} \rangle$.

$L \neq G \Rightarrow (\exists g_0 \in G$ tel que $g_0 \notin L)$

On a $\left(\begin{array}{l} l \in L \\ g_0 \notin L \\ L \text{ sous-groupe de } G \end{array} \right)$

donc $l g_0 \notin L$; car sinon, on aurait $l^{-1} \cdot (l g_0) = g_0 \in L$

$\Rightarrow l g_0 \in \overline{L} \subset \langle \overline{L} \rangle$

Or $\langle \overline{L} \rangle$ s-groupe de G et $g_0 \in \overline{L} \subset \langle \overline{L} \rangle$

Alors $(l g_0) \cdot g_0^{-1} \in \langle \overline{L} \rangle$

$\Rightarrow l \in \langle \overline{L} \rangle$

$\langle \overline{L} \rangle$ contient L et $\overline{L}$ donc $\langle \overline{L} \rangle \supset (L \cup \overline{L}) = G$

$\Rightarrow \langle \overline{L} \rangle = G$

fin

Exercice 4 :

Soit $(G,.)$ un groupe multiplicatif fini, de neutre e et de cardinal $\mathbf{n}$.
Soit H un sous-groupe de G. Notons $card(H) = p$.
Considérons la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur G par

$$x\mathcal{R}y \;\Leftrightarrow\; xy^{-1} \in H$$

1) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur G.
2) Soient $g \in G$ et $\overline{g}$ sa classe d'équivalence.
   i) Expliciter $\overline{g}$.
   ii) Montrer que $\overline{g}$ est équipotent à H.
3) Déduire que $p|n$.
   *C'est le **théorème de Lagrange**.*
4) En déduire le résultat du cours :

$$\forall g \in G,\; g^n = e$$

1) Facile.

2) i) $\overline{g} = Hg$, où $Hg = \{hg / h \in H\}$

$\boxed{x \in \overline{g}} \Leftrightarrow x\mathcal{R}g \Leftrightarrow xg^{-1} \in H \Leftrightarrow (\exists h \in H, xg^{-1} = h)$
$\Leftrightarrow (\exists h \in H, x = hg) \Leftrightarrow \boxed{x \in Hg}$

ii) Une application naturelle de H vers Hg est :

$$f : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & Hg \\ h & \longmapsto & hg \end{array}$$

f est bijective ; en effet :
→ f surjective par construction.
→ f injective. (Evident)

3) Notons $\overline{g}_1, \dots, \overline{g}_r$ les classes d'équivalences de G.

Elles forment une partition de G.

D'où $\text{card}(G) = \sum_{i=1}^{r} \text{card}(\overline{g}_i)$

$= \sum_{i=1}^{r} \text{card}(H)$ (d'après 2/ii/)

D'où $\mathrm{Card}(G) = r.\mathrm{card}(H)$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Card}(H) \mid \mathrm{card}(G)$

4) L'ordre de l'élément g est égal au cardinal du s-groupe engendré par g.

Soit $g \in G$. On sait que $o(g) = \mathrm{Card}(\langle g \rangle)$

Et 3) $\Rightarrow$ $\mathrm{card}(\langle g \rangle) \mid \mathrm{card}(G)$

$\Rightarrow$ $o(g) \mid \mathrm{card}(G)$

D'autre part, $g^{o(g)} = e$

D'où $g^{\mathrm{card}(G)} = e$

Fin Exercice 4

Exercice 5 :

Soit $(G, .)$ un groupe fini, de neutre **e** et de cardinal **n**, vérifiant que

$$\forall g \in G,\ g^2 = e$$

1) Montrer que G est commutatif.
2) Soient H un sous-groupe de G et $x \notin H$.
   Montrer que $K = H \cup xH$ est un sous-groupe de G et que $card(K) = 2 \times card(H)$.
3) En déduire que **n** est une puissance de 2.

1) $g^2 = e \Leftrightarrow g^{-1} = g$

Ainsi $xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$

2) i) K s-groupe de G ?

Soient $a, b \in K = H \sqcup xH$. Mque $ab^{-1} \in K$.

Distinguer les cas : $\begin{cases} a \in H \text{ et } b \in H \\ a \in xH \text{ et } b \in xH \\ a \in H \text{ et } b \in xH \\ a \in xH \text{ et } b \in H \end{cases}$

ii) $Card(K) \overset{?}{=} 2\, card(H)$.

H et xH sont disjoints.

3) Si $G = \{e\}$; $Card(G) = 1 = 2^0$

Sinon. On a $G \neq \{e\}$.

Soit $x_1 \neq e$. Notons $H_1 = \langle x_1 \rangle$.

$Card(H_1) = o(x_1) = 2$ Car $\begin{cases} x_1 \neq e \\ x_1^2 = e \end{cases}$

Si $G = H_1$, c'est fini.

Sinon, on a $G \neq H_1$.

Soit $x_2 \notin H_1$.

$\begin{cases} H_2 = H_1 \sqcup (x_2 . H_1) \text{ sg} \\ Card(H_2) = 2\, card(\langle H_1) = 2^2 \end{cases}$

Ainsi de suite. Le processus va s'arrêter.

On aura :

$$\begin{cases} Card(H_i) = 2^i \\ H_i = G \end{cases}$$

Méthode 2

Par récurrence forte sur le cardinal n de G.

↳ Pour $n=1$, $card(G) = 2^0$

↳ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que la propriété est vraie jusqu'à n

Mq qu'elle est vraie pour $(n+1)$.

Soit $(G, \cdot)$ groupe de cardinal $(n+1)$ et vérifiant :

$$(\forall x \in G,\ x^2 = e)$$

Soit H un sous-groupe strict de G ; ça existe

C'est le cas de $\{e\}$.

Prenons H comme étant de plus grand cardinal.

Soit $x \notin H$. $\begin{cases} H \sqcup (xH) \text{ s-groupe de } G \\ Card(H \sqcup (xH)) = 2\,card(H) \end{cases}$

Or $Card(H) \leq n$ et $(\forall h \in H, h^2 = e)$

Alors par hypothèse de récurrence, il existe $p \in \mathbb{N}$

tel que $Card(H) = 2^i$.

Ainsi, $H \sqcup (xH)$ s-groupe de G de cardinal 2^{i+1}.

Or $H \sqcup (xH) = G$ par définition de H.

D'où la conclusion.

$\square$

Fin Exercice 5

Exercice 6 :

Soit H un sous-groupe non nul de $\mathbb{R}$.
Notons $H^+ = H \cap \,]0, +\infty[$ et $\alpha = inf(H^+)$.

1. Justifier d'abord l'existence de α.
2. Supposons ici que $\alpha > 0$.
   Montrer que $\alpha \in H^+$ et que $H = \alpha\mathbb{Z}$; où $\alpha\mathbb{Z} = \{\alpha m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.
3. Supposons maintenant que $\alpha = 0$.
   On se propose de montrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.
   Soient alors $x < y$ deux réels.
   i) Montrer que
   $$\exists h \in H, \; 0 < h < y - x$$
   ii) Conclure.

Exercice 7 :

Soient $(G,.)$ un groupe fini et ψ un morphisme de G vers le groupe $\mathbb{C}^*$.
Supposons que ψ n'est pas une application constante.
Montrer que $\sum_{g\in G} \psi(g) = 0$.

Soit $a \in G$. On a $G = \{ag \mid g \in G\}$ (clair par double implication)

D'où
$$\sum_{g\in G} \psi(g) = \sum_{g\in G} \psi(ag)$$
$$= \sum_{g\in G} \psi(a) \times \psi(g) \quad \left(\begin{array}{l}\text{car } \psi \text{ morphisme} \\ \text{de } (G,\cdot) \text{ vers } (\mathbb{C}^*,\times)\end{array}\right)$$
$$= \psi(a)\cdot \sum_{g\in G} \psi(g)$$
$$\Rightarrow (1-\psi(a))\cdot\left(\sum_{g\in G} \psi(g)\right) = 0 \quad (\Omega)$$

D'autre part :

$$\psi \text{ constante} \iff (\forall x \in G,\ \psi(x) = \psi(e))$$
$$\iff (\forall x \in G,\ \psi(x) = 1)$$

Or ψ constante, alors il existe $a \in G$ tel que $\psi(a) \neq 1$.

De (Ω) on tire que $\sum_{g\in G} \psi(g) = 0$

Fin Ex 7