

CONCOURS COMMUN SUP 2001

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve spécifique de Mathématiques (filière MPSI)

vendredi 18 mai 2001 de 08h00 à 12h00

Extrait

PROBLEME 2

Dans ce problème φ désigne une fonction continue strictement positive sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points.

On suppose par ailleurs que φ possède une limite ℓ (finie ou infinie) en $+\infty$.

Le but de ce problème est d'étudier la fonction f où $f(x)$ est défini, pour x réel, comme étant l'unique solution de l'équation (E_x) d'inconnue y :

$$(E_x) \quad \int_x^y \varphi(t) dt = 1$$

La partie I est consacrée à un exemple où l'on détermine explicitement f .

La partie II permet d'aboutir à l'existence de f si $\ell \neq 0$.

La partie III étudie des propriétés de la fonction f .

La partie IV illustre les parties II et III sans calcul explicite de f .

Partie I :

Dans cette partie, la fonction φ est la fonction exponentielle $\exp$.

1) Prouver que pour tout x réel l'équation (E_x) possède une unique solution notée $f(x)$.
On montrera que $f(x) = \ln(1 + e^x)$.

2) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$. Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle d'étude.

3) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ représentant f . Préciser la position de celle-ci par rapport à l'asymptote.

4) Déterminer un développement limité à l'ordre 2 pour la fonction f au voisinage de 0.
En déduire l'équation de la tangente en 0 à $\mathcal{C}$ et la position locale de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à celle-ci.

5) Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé, en utilisant les résultats des questions précédentes.

Partie II :

Pour x réel, on pose $\Phi_x(u) = \int_x^u \varphi(t) dt$.

On rappelle que Φ_x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour u réel, $\Phi'_x(u) = \varphi(u)$.

1) Dans cette question seulement, φ est définie, pour tout t réel, par : $\varphi(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$.

1) a) Montrer que pour x et y réels, $\int_x^y \varphi(t) dt < 1$.

1) b) En déduire que pour tout x réel, l'équation (E_x) n'a pas de solution.

1) c) Que vaut ℓ ?

Dans tout le reste de ce problème, on suppose que $\ell \neq 0$.

2) Exprimer l'équation (E_x) à l'aide de la fonction Φ_x .

3) a) Montrer que Φ_x est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en conclure ?

3) b) Montrer qu'il existe t_0 réel et $A > 0$ tels que pour tout $t \geq t_0$, $\varphi(t) \geq A$.

On pourra distinguer les cas $\ell = +\infty$ et ℓ réel.

3) c) En déduire que pour tout x réel, il existe $u \geq x$ tel que $\Phi_x(u) > 1$.

3) d) En remarquant que $\Phi_x(x) = 0$, montrer que l'équation (E_x) possède une solution unique.

Jusqu'à la fin de ce problème, $f(x)$ désigne pour x réel, l'unique solution de l'équation (E_x) .

Partie III :

1) Montrer, en justifiant l'écriture, que pour tout x réel, $f(x) = \Phi_0^{-1}(\Phi_0(x) + 1)$ (on pourra admettre les résultats de la question II) 3)).

2) En déduire que f est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3) a) On suppose dans cette question a), que φ ne s'annule pas. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour x réel, montrer que : $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(f(x))}$.

3) b) On suppose dans cette question b), qu'il existe x_0 réel tel que $\varphi(x_0) \neq 0$ et tel que φ reste strictement positive sur un voisinage de $f(x_0)$ sauf en $f(x_0)$ où φ s'annule.

Montrer que f n'est pas dérivable en x_0 mais que la courbe représentant f possède au point d'abscisse x_0 une tangente verticale.

4) On se propose d'étudier la branche infinie de f au voisinage de $+\infty$ dans le cas où $\ell = +\infty$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

4) a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour $t \geq a$, $\varphi(t) \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

4) b) En déduire que si $x \geq a$, $|f(x) - x| \leq \varepsilon$. Que peut-on en conclure ?

5) Etudier de même la branche infinie de f au voisinage de $+\infty$ dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}_+^*$.

6) Dans cette question, on suppose φ paire. On note Γ le graphe de f .

6) a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $(x, y) \in \Gamma$ si et seulement si $(-y, -x) \in \Gamma$.

6) b) En déduire que la courbe représentant f possède un axe de symétrie à déterminer.

Partie IV :

Dans cette partie, φ est la fonction définie, pour tout x réel, par $\varphi(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

1) Justifier que φ vérifie les hypothèses du problème.

2) Sans calculer $f(x)$ et en utilisant les résultats des parties précédentes, esquisser le graphe de la fonction f , en précisant les éléments remarquables (asymptotes, axe de symétrie, points à tangentes horizontales ou verticales).

FIN