Correction

Partie I

1. $(E) \Leftrightarrow z^5 = 1$. Les solutions de (E) sont les racines 5ème de l'unité, à savoir $1, e^{i2\pi/5}, e^{i4\pi/5}, e^{i6\pi/5}, e^{i8\pi/5}$.

2.a $Q(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.

2.b Pour $z \neq 0$, $\dfrac{Q(z)}{z^2} = \left(z + \dfrac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \dfrac{1}{z}\right) - 1$. $a = 1, b = 1$ et $c = -1$.

2.c $\Delta = 5$, les racines sont $Z_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $Z_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

2.d Il est clair que 0 n'est pas solution de l'équation $Q(z) = 0$ et donc les solutions de cette équation sont les mêmes que celles de $Q(z)/z^2 = 0$ à savoir les solutions des deux équations :

$(E_1) : z + \dfrac{1}{z} = Z_1$ et $(E_2) : z + \dfrac{1}{z} = Z_2$.

$(E_1) \Leftrightarrow z^2 - Z_1 z + 1 = 0$, $\Delta_1 = \dfrac{-2\sqrt{5} - 10}{4}$,

$z_1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} + i\dfrac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4}$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} - i\dfrac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4}$

$(E_2) \Leftrightarrow z^2 - Z_2 z + 1 = 0$, $\Delta_2 = \dfrac{2\sqrt{5} - 10}{4}$,

$z_3 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} + i\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ et $z_4 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} - i\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

Les solutions de l'équation $Q(z) = 0$ sont z_1, z_2, z_3, z_4

3. Puisque $z^5 - 1 = (z-1)Q(z)$, les solutions de l'équation (E) sont $1, z_1, z_2, z_3, z_4$ mais sont aussi $1, e^{i2\pi/5}, e^{i4\pi/5}, e^{i6\pi/5}, e^{i8\pi/5}$.

On observe que $\mathrm{Re}(e^{i2\pi/5}) > 0$ et $\mathrm{Im}(e^{i2\pi/5}) > 0$ alors que $\mathrm{Re}(z_3) \leq 0$, $\mathrm{Re}(z_4) \leq 0$ et $\mathrm{Im}(z_2) \leq 0$, on peut donc conclure $e^{i2\pi/5} = z_1$ ce qui donne :

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ et } \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4}.$$

On observe que $\mathrm{Re}(e^{i4\pi/5}) < 0$ et $\mathrm{Im}(e^{i4\pi/5}) > 0$ alors que $\mathrm{Re}(z_1) \geq 0$, $\mathrm{Re}(z_2) \geq 0$ et $\mathrm{Im}(z_4) \leq 0$, on peut donc conclure $e^{i4\pi/5} = z_3$ ce qui donne :

$$\cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} \text{ et } \sin\frac{4\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Enfin, $\cos\dfrac{\pi}{5} = -\cos\dfrac{4\pi}{5}$ et $\sin\dfrac{\pi}{5} = \sin\dfrac{4\pi}{5}$ ce qui donne

$$\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \text{ et } \sin\frac{4\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Partie II

1.a Puisque $\sin(h/2) = 0$, il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $h = 2\ell\pi$.

On a alors $C(a,h) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos a = n\cos a$ et de même $S(a,h) = n\sin a$.

1.b $C(a,h)+iS(a,h)=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{i(a+kh)}=\mathrm{e}^{ia}\dfrac{\mathrm{e}^{inh}-1}{\mathrm{e}^{ih}-1}$ par sommation géométrique.

De plus $\mathrm{e}^{ia}\dfrac{\mathrm{e}^{inh}-1}{\mathrm{e}^{ih}-1}=\mathrm{e}^{i(a+(n-1)h/2)}\dfrac{\mathrm{e}^{inh/2}-\mathrm{e}^{-inh/2}}{\mathrm{e}^{ih/2}-\mathrm{e}^{-ih/2}}=\mathrm{e}^{i(a+(n-1)h/2)}\dfrac{\sin(nh/2)}{\sin(h/2)}$ et donc en reconnaissant parties réelles et imaginaires :

$$C(a,h)=\frac{\sin\frac{nh}{2}\cos\left(a+(n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}\text{ et }S(a,h)=\frac{\sin\frac{nh}{2}\sin\left(a+(n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}.$$

2.a En localisant les angles dans $[0,\pi/2[$ ou $]\pi/2,\pi]$, on obtient aisément : $\cos 3\theta>0$, $\cos 5\theta>0$, $\cos 7\theta>0$ et $\cos 11\theta<0$.
Or $\cos 11\theta=-\cos 6\theta$ et $\cos 6\theta<\cos 5\theta$ donc $\cos 5\theta+\cos 11\theta>0$.
Il est alors immédiat que $x_1>0$.

2.b $x_1+x_2=C(\theta,2\theta)$ avec $n=8$ ce qui donne : $x_1+x_2=\dfrac{\sin 8\theta\cos 8\theta}{\sin\theta}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin 16\theta}{\sin\theta}=\dfrac{1}{2}$.

2.c Rappelons $\cos a\cos b=\dfrac{1}{2}\big(\cos(a+b)+\cos(a-b)\big)$ et donc
$2x_1x_2$ est la somme des cosinus des angles suivants :
$4\theta,2\theta,12\theta,6\theta,16\theta,10\theta,18\theta,12\theta,6\theta,4\theta,14\theta,4\theta,18\theta,8\theta,20\theta,10\theta$
$8\theta,6\theta,16\theta,2\theta,20\theta,6\theta,22\theta,8\theta,12\theta,10\theta,20\theta,2\theta,24\theta,2\theta,26\theta,4\theta$.
En exploitant $\cos(2\pi-x)=\cos x$, on obtient $\cos 26\theta=\cos 8\theta$, $\cos 24\theta=\cos 10\theta$, $\cos 22\theta=\cos 12\theta$, $\cos 20\theta=\cos 14\theta$ et $\cos 18\theta=\cos 16\theta$.
Ainsi : $2x_1x_2=4(\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cdots+\cos 16\theta)$.
Sachant $\cos(\pi-x)=-\cos x$, on obtient :
$x_1x_2=-2(\cos 15\theta+\cos 13\theta\cdots+\cos\theta)=-2(x_1+x_2)=-1$.

2.d Sachant $x_1+x_2=1/2$ et $x_1x_2=-1$, on peut affirmer que x_1 et x_2 sont les racines de l'équation $x^2-\dfrac{1}{2}x-1=0$ à savoir $x_1=\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$ et $x_2=\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}$ car on sait $x_1<0$.

3.a $2y_1y_2$ est la somme des cosinus des angles $10\theta,4\theta,14\theta,8\theta,12\theta,2\theta,16\theta,6\theta$ ce qui donne
$2y_1y_2=-(\cos\theta+\cdots+\cos 15\theta)=-1/2$ puis $y_1y_2=-1/4$.
$2y_3y_4$ est la somme des cosinus des angles $10\theta,8\theta,16\theta,14\theta,22\theta,4\theta,28\theta,2\theta$ ce qui donne
$2y_3y_4=-(\cos\theta+\cdots+\cos 15\theta)=-1/2$ puis $y_3y_4=-1/4$.

3.b $y_1+y_2=x_1$ et $y_1y_2=-1/4$ donc y_1 et y_2 sont les racines de l'équation $y^2-x_1y-\dfrac{1}{4}=0$. Sachant $y_2=\cos 7\theta-\cos 6\theta<0$, on obtient après résolution : $y_1=\dfrac{1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8}$ et

$y_2=\dfrac{1+\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8}$.

De même pour y_3,y_4 et sachant $y_4<0$

$y_3=\dfrac{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$ et $y_4=\dfrac{1-\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$.

4. $2\cos\theta\cos 13\theta=\cos 14\theta+\cos 12\theta=-(\cos 3\theta+\cos 5\theta)=-y_1$ donc $\cos\theta\cos 13\theta=-y_1/2$. De plus $\cos\theta+\cos 13\theta=y_3$ donc $\cos\theta$ et $\cos 13\theta$ sont les solutions de l'équation $x^2-y_3x-\dfrac{y_1}{2}=0$. Enfin, puisque $\cos\theta>\cos 13\theta$, on saura déterminer laquelle des deux solutions de l'équation précédente est $\cos\theta$.