Suites et séries de fonctions

Exercice 1:

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n(x) = x^n \ln x \text{ avec } x \in]0\,;1] \text{ et } u_n(0) = 0$$

Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ sur $[0\,;1]$.

Exercice 2:

On pose

$$u_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}\sin(nx) \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+$$

a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (u_n) sur $[0\,;+\infty[$.

b) Étudier la convergence uniforme sur $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$.

c) Étudier la convergence uniforme sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 3:

Soit $f_n\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n^2x(1-nx) \text{ si } x \in [0\,;1/n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ sinon}$$

a) Étudier la limite simple de la suite (f_n).

b) Calculer

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction (f_n) ?

c) Étudier la convergence uniforme sur $[a\,;1]$ avec $a > 0$.

Exercice 4:

Pour $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

a) Justifier que S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Préciser le sens de variation de S.

c) Établir

$$\forall x > 0, S(x+1) + S(x) = 1/x$$

d) Donner un équivalent de S en 0.

e) Donner un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 5:

On considère la série des fonctions

$$f_n(x) = nx^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

définies sur $\mathbb{R}_+$.

Étudier sa convergence simple, sa convergence normale et sa convergence uniforme.

Exercice 6:

On note 1_I la fonction caractéristique d'un intervalle I :

$$1_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur $[0\,;+\infty[$ de la série des fonctions

$$u_n(x) = \frac{1}{n+1} 1_{[n;n+1[}(x)$$

Exercice 7:

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive et décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n(x) = a_n x^n (1-x) \text{ avec } x \in [0\,;1]$$

a) Montrer la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$.
b) Montrer que cette série converge normalement si, et seulement si, il y a convergence de la série $\sum a_n/n$.
c) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément si, et seulement si, $a_n \to 0$.

Exercice 8:

Considérons la fameuse fonction *zéta de Riemann*

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

1) Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.
2) Etudier la monotonie et la convexité de ζ.
3) Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.
4) i) Déterminer la limite de ζ en 1.
   ii) Déterminer un équivalent simple de ζ en 1.
   iii) Tracer l'allure de la courbe de ζ.
5) Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(\zeta(x))$ est convexe sur $]1, +\infty[$.
   Vous pouvez appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 9:

On pose

$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

Montrer que la fonction ζ_2 est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

.

Exercice 10:

Soit
$$\psi(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-x}-\frac{1}{n+x}\right)$$

Justifier l'existence de l'intégrale suivante, et calculer-la.
$$\int_0^1 \psi(x)\,\mathrm{d}x$$

.

Exercice 11:

On pose
$$u_n(x)=(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x \text{ pour } x\in\left]0\,;1\right] \text{ et } u_n(0)=0$$

a) Calculer
$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$$

b) Montrer que la série des u_n converge uniformément sur $[0\,;1]$.

c) En déduire l'égalité
$$\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

.

Exercice 12:

Ensemble de définition et continuité de
$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

En trouver la limite en $+\infty$ et un équivalent en 0^+.

Exercice 13:

Pour $t>0$, on pose $S(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{nt+1}$

Déterminer la limite de $S(t)$ quand $t\to 0^+$.

Exercice 14:

Soit $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$

a) Quel est le domaine de définition de f ?
Étudier la continuité de f sur celui-ci.

b) Montrer que f est strictement décroissante.
c) Étudier la limite de f en $+\infty$.
d) Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

Exercice 15:

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{x^n}{1+x^n}$$

a) Justifier que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
b) Établir que pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) + f(1/x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

c) Établir que f est continue sur $]-1\,;1[$ puis que f est continue sur $]-\infty\,;-1[$ et $]1\,;+\infty[$.
d) Établir la continuité de f en 1.

Exercice 16:

Soit α un réel. Pour tout entier $n > 0$ et tout réel x, on pose

$$u_n(x) = \frac{n^\alpha x \,\mathrm{e}^{-nx}}{n^2+1}$$

On note I le domaine de définition de

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

a) Déterminer I.
b) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
c) A-t-on convergence normale sur $\mathbb{R}_+$?
d) On suppose $\alpha \geq 2$. Montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n)$$

ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
La convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ est-elle uniforme sur I ?
e) Étudier la continuité de S sur I.

Exercice 17:

On suppose $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni d'une norme $\|.\|$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $|t| < 1/\|A\|$, on pose

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k A^k$$

a) Montrer que f est bien définie et que $f(t) = (I - tA)^{-1}$.

b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $f'(t) = A(I - tA)^{-2}$.

Exercice 18:

On suppose $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni d'une norme notée $\|.\|$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $|t| < 1/\|A\|$ on pose

$$f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} t^k A^k$$

a) Montrer que f est bien définie.

b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que

$$(I - tA)f'(t) = A$$

Fin