

**Concours National Commun**  
**CORRIGÉ DE**  
**L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES 1**  
**Session 2025 - Filière MP**

m.laamoum2@gmail.com<sup>1</sup>

**EXERCICE**

Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  à valeurs réelles. On note  $\varphi_f$  l'application définie, pour tout réel  $x$ , pour lequel l'intégrale existe, par

$$\varphi_f(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) e^{-t} dt$$

On suppose de plus que la fonction  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ , c'est-à-dire :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, |f(x, t)| \leq M$$

1. a) Soit  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ . On a  $e^{-t} > 0$  et  $|f(x, t)| \leq M$ , donc,  $|f(x, t)e^{-t}| \leq Me^{-t}$ .

b) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La fonction  $t \mapsto f(x, t)e^{-t}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

D'après la question précédente,  $\forall t \in \mathbb{R}^+, |f(x, t)e^{-t}| \leq Me^{-t}$ .

L'intégrale  $\int_0^{+\infty} Me^{-t} dt$  converge ( $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$ ). Par comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} |f(x, t)e^{-t}| dt$  converge.

Ceci implique que la fonction  $t \mapsto f(x, t)e^{-t}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ , donc l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(x, t)e^{-t} dt$  est convergente. Ainsi,  $\varphi_f(x)$  est définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

c) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a  $0 \leq |f(x, t)e^{-t}| \leq Me^{-t}$ . Comme  $\lim_{t \rightarrow +\infty} Me^{-t} = 0$ , par le théorème d'encadrement, on conclut que  $\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} f(x, t)e^{-t} = 0}$ .

2. a) Les fonctions  $g$  et  $h$  sont continues sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  et elles sont majorées (en valeur absolue) par  $M = 1$ .

D'après la question Q1.b), les fonctions  $\varphi_g$  et  $\varphi_h$  sont définies sur  $\mathbb{R}$ .

b) Soit  $x \in \mathbb{R}$ .  $\varphi_g(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t} dt$ . Effectuons une intégration par parties.

$$\text{Posons } \begin{cases} u(t) = \cos(xt) \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases} \quad \text{alors } \begin{cases} u'(t) = -x \sin(xt) \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$$

Pour  $A > 0$ ,

$$\int_0^A \cos(xt)e^{-t} dt = [-\cos(xt)e^{-t}]_0^A - \int_0^A (-x \sin(xt))(-e^{-t}) dt = 1 - \cos(xA)e^{-A} - x \int_0^A \sin(xt)e^{-t} dt.$$

Ainsi, en passant à la limite  $A \rightarrow +\infty$ , on obtient  $\boxed{\varphi_g(x) = 1 - x\varphi_h(x)}$ .

---

1. Tous mes corrigés sont disponibles ici <https://tinyurl.com/4up84xze>

c) Soit  $x \in \mathbb{R}$ .  $\varphi_h(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t}dt$ .

$$\text{Posons } \begin{cases} u(t) = \sin(xt) \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases} \quad \text{alors } \begin{cases} u'(t) = x \cos(xt) \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$$

Pour  $A > 0$ ,

$$\int_0^A \sin(xt)e^{-t}dt = [-\sin(xt)e^{-t}]_0^A - \int_0^A (x \cos(xt))(-e^{-t})dt = -\sin(xA)e^{-A} + x \int_0^A \cos(xt)e^{-t}dt.$$

Ainsi, en passant à la limite  $A \rightarrow +\infty$  : on a  $\boxed{\varphi_h(x) = x\varphi_g(x)}$ .

d) Nous avons les relations :  $\varphi_g(x) = 1 - x\varphi_h(x)$  et  $\varphi_h(x) = x\varphi_g(x)$  , donc

$$\varphi_g(x) = 1 - x(x\varphi_g(x)) = 1 - x^2\varphi_g(x).$$

D'où  $\varphi_g(x)(1 + x^2) = 1$ . Comme  $1 + x^2 \neq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  , alors :  $\boxed{\varphi_g(x) = \frac{1}{1 + x^2}}$ .

e) Soit  $x \in ]0, +\infty[$ .

• On a

$$\int_0^x \varphi_g(u)du + \int_0^{\frac{1}{x}} \varphi_g(u)du = \int_0^x \frac{1}{1+u^2}du + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+u^2}du = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

La fonction  $F : x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$  et  $F'(x) = 0$  pour tout  $x \in ]0, +\infty[$  , donc elle est constante sur  $]0, +\infty[$  et  $F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$  .

Ainsi  $\boxed{\int_0^x \varphi_g(u)du + \int_0^{\frac{1}{x}} \varphi_g(u)du = \frac{\pi}{2}}$

• Pour la seconde identité : On a  $\varphi_h(u) = u\varphi_g(u) = \frac{u}{1+u^2}$ , donc

$$\int_0^x \varphi_h(u)du = \int_0^x \frac{u}{1+u^2}du = \left[ \frac{1}{2} \ln(1+u^2) \right]_0^x = \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^x \varphi_h(u)du - \int_0^{\frac{1}{x}} \varphi_h(u)du &= \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2) \end{aligned}$$

D'où  $\boxed{\int_0^x \varphi_h(u)du - \int_0^{\frac{1}{x}} \varphi_h(u)du = \ln(x)}$  .

# PROBLÈME

## PARTIE 1 :

### Étude d'une série géométrique particulière et son application

1. a) On a  $\sum_{k=0}^n f_k(x) = \sum_{k=0}^n x^k$ . C'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison  $x \neq 1$ , donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^n f_k(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}}.$$

- b) Soit  $x \neq 1$ . On dérive la relation précédente

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \right) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

d'où  $\boxed{\sum_{k=1}^n kf_{k-1}(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}}.$

- c) i) Soit  $x \in ]-1, 1[$ . On a

$$n|x|^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{\ln n + n \ln |x|} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Si  $x \neq 0$  alors

$$\ln n + n \ln |x| = n \left( \ln |x| + \frac{\ln n}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty \quad (\text{car } \frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } \ln |x| < 0)$$

ce qui donne

$$e^{\ln n + n \ln |x|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

d'où  $n|x|^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Ainsi pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,  $\boxed{nx^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$ .

- ii) Pour  $x \in ]-1, 1[$ , on fait tendre  $n$  vers  $+\infty$  dans l'expression de 1.b). Les termes  $nx^{n+1}$  et  $(n+1)x^n$  tendent vers 0.

Ce qui prouve la convergence de  $\sum_{n \geq 1} nf_{n-1}(x)$  et  $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} nf_{n-1}(x) = \frac{1}{(1-x)^2}}$ .

2. Soit

$$S_j(x) = \sum_{n=j}^{+\infty} \binom{n}{j} f_{n-j}(x) = \sum_{n=j}^{+\infty} \binom{n}{j} x^{n-j}.$$

- a) On a

$$R_{cv} \left( \sum_{n \geq j} \binom{n}{j} x^{n-j} \right) = R_{cv} \left( \sum_{n \geq j} \binom{n}{j} x^n \right)$$

Utilisons la règle de D'Alembert

$$\left| \frac{\binom{n+1}{j}}{\binom{n}{j}} \right| = \frac{(n+1)!}{(n+1-j)! j!} \frac{(n-j)! j!}{n!} = \frac{n+1}{n+1-j} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Donc le rayon de convergence est  $R = 1$ .

- b)  $S_j$  est la somme d'une série entière de rayon de convergence 1, donc elle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, 1[$ .  
 Pour  $x \in ] -1, 1[$ , on a

$$S'_j(x) = \sum_{n=j+1}^{+\infty} \binom{n}{j} (n-j) x^{n-j-1}.$$

On utilise

$$\binom{n}{j} (n-j) = \frac{n!}{j!(n-(j+1))!} = (j+1) \binom{n}{j+1}.$$

donc

$$S'_j(x) = \sum_{n=j+1}^{+\infty} (j+1) \binom{n}{j+1} x^{n-(j+1)} = (j+1) S_{j+1}(x).$$

D'où  $\boxed{S'_j(x) = (j+1) S_{j+1}(x)}$ .

- c) Par récurrence sur  $j$ .

- Pour  $j = 0$ ,

$$S_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k}{0} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Vrai.

- Supposons  $S_j(x) = \frac{1}{(1-x)^{j+1}}$ . Alors

$$S'_j(x) = \frac{j+1}{(1-x)^{j+2}}.$$

et d'après b),

$$S_{j+1}(x) = \frac{1}{j+1} S'_j(x) = \frac{1}{(1-x)^{j+2}}$$

la formule est vraie pour tout  $j+1$ .

Ainsi pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,  $\boxed{S_j(x) = \frac{1}{(1-x)^{j+1}}}$ .

- d) Soit  $x \in ] -1, 1[$ , on a

$$n^2 f_{n-1}(x) = n^2 x^{n-1} = n(n-1)x^{n-1} + nx^{n-1}.$$

Par la règle de D'Alembert la série  $\sum n^2 f_{n-1}(x)$  converge et

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 f_{n-1}(x) &= x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} \\ &= x \frac{d^2}{dx^2} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) + \frac{d}{dx} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) \\ &= x \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{1-x} \right) + \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1-x} \right) \\ &= \frac{2x}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1+x}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

Ainsi  $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 f_{n-1}(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}}$ .

3.  $X \sim \mathcal{G}(p)$ .  $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $q = 1-p$ .

- a) Comme  $p \in ]0, 1[$  alors la série de terme général  $k\mathbb{P}(X = k) = kpq^{k-1}$  est convergente, donc  $X$  admet une espérance et on a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} kpq^{k-1} = pS_1(q).$$

D'après Q1.c).ii), avec  $x = q$ , la somme vaut

$$\mathbb{E}(X) = pS_1(q) = p \frac{1}{(1-q)^2} = p \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

d'où  $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}}.$

- b) D'après le théorème du transfert  $X^2$  admet une espérance si la série  $\sum_{k \geq 1} k^2 \mathbb{P}(X = k)$  converge.

On a  $k^2 \mathbb{P}(X = k) = k^2 pq^{k-1}$ , par la règle de D'Alembert la série  $\sum_{k \geq 1} k^2 pq^{k-1}$  converge, donc  $X^2$  admet une espérance. Par suite

$$\mathbb{E}(X^2) = p \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 f_{k-1}(q).$$

D'après Q2.d, avec  $x = q$ , on a

$$\mathbb{E}(X^2) = p \frac{1+q}{(1-q)^3} = p \frac{1+q}{p^3} = \frac{1+q}{p^2} = \frac{1+(1-p)}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}.$$

d'où  $\boxed{\mathbb{E}(X^2) = \frac{2-p}{p^2}}.$

- c) On a

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{2-p}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

d'où  $\boxed{\mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{1-p}{p^2}}.$

## PARTIE 2 :

### La résolution d'une équation différentielle

On a  $f(x, t) = \frac{e^{-tx}}{1+x^2}$ . Ainsi,  $g_{(n,t)}(x) = x^n f(x, t) = \frac{x^n e^{-tx}}{1+x^2}$ .

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La fonction  $x \mapsto \frac{x^n e^{-tx}}{1+x^2}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

Pour  $t > 0$ , on a  $\left| \frac{x^n e^{-tx}}{1+x^2} \right| \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ . Par la règle de Riemann l'intégrale  $\int_0^{+\infty} g_{(n,t)}(x) dx$  converge pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}^{+*}$ .

2. Par application du théorème de dérivation des intégrales à paramètres :

- Pour tout  $t \in \mathbb{R}^{+*}$ , la fonction  $x \mapsto g_{(n,t)}(x)$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .
- La fonction  $(t, x) \mapsto g_{(n,t)}(x)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $(\mathbb{R}^{+*})^2$ , et

$$\frac{\partial}{\partial t} (g_{(n,t)}(x)) = \frac{x^{n+1} e^{-tx}}{1+x^2} = -g_{(n+1,t)}(x).$$

- **Domination :** Soit  $[a, b]$  un segment inclus dans  $\mathbb{R}^{+*}$ .

Pour tout  $t \in [a, b]$  et pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} (g_{(n,t)}(x)) \right| = \frac{x^{n+1} e^{-tx}}{1+x^2} \leq \frac{x^{n+1} e^{-ax}}{1+x^2}$$

La fonction  $\psi(x) = \frac{x^{n+1} e^{-ax}}{1+x^2}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  d'après la question 1.

Par le théorème de dérivation sous le signe intégrale,  $h_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur tout  $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ , donc elle est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et

$$h'_n(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} (g_{(n,t)}(x)) dx = \int_0^{+\infty} -g_{(n+1,t)}(x) dx = -h_{n+1}(t).$$

Ainsi  $\boxed{h_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ et } h'_n(t) = -h_{n+1}(t)}.$

3. Montrons par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}^*$  que  $h_n$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et que  $h_n^{(k)}(t) = (-1)^k h_{n+k}(t)$ .

- **Initialisation** : D'après Q2,  $h_n$  est  $\mathcal{C}^1$  et  $h'_n = -h_{n+1}$ . La propriété est vraie pour  $k = 1$ .

- **Hérédité** : Supposons que pour un  $k \geq 1$ ,  $h_n$  est  $\mathcal{C}^k$  et  $h_n^{(k)}(t) = (-1)^k h_{n+k}(t)$ .

D'après Q2, la fonction  $h_{n+k}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . Donc  $h_n^{(k)}$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^1$ . Ceci implique que  $h_n$  est de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . De plus,

$$h_n^{(k+1)}(t) = \frac{d}{dt}((-1)^k h_{n+k}(t)) = (-1)^k h'_{n+k}(t) = (-1)^{k+1} h_{n+k+1}(t).$$

La propriété est vraie au rang  $k + 1$ .

Ainsi pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\boxed{h_n \text{ est } \mathcal{C}^k \text{ sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ et } h_n^{(k)}(t) = (-1)^k h_{n+k}(t)}.$

4. Soit  $I_n(t) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-tx} dx$ .

- a) On a pour tout  $t \in ]0, +\infty[$  et  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $x \mapsto x^n e^{-tx}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et  $x^n e^{-tx} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ . Donc la fonction  $x \mapsto x^n e^{-tx}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ , d'où l'existence de  $I_n(t)$ .
- b) Pour  $n \geq 1$  et  $t > 0$ , effectuons une intégration par parties :

$$\text{Posons } \begin{cases} u(x) = x^n \\ v'(x) = e^{-tx} \end{cases} . \text{ Alors } \begin{cases} u'(x) = nx^{n-1} \\ v(x) = -\frac{e^{-tx}}{t} \end{cases} .$$

donc

$$I_n(t) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left( \left[ -x^n \frac{e^{-tx}}{t} \right]_0^A - \int_0^A nx^{n-1} \left( -\frac{e^{-tx}}{t} \right) dx \right).$$

on a  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ -x^n \frac{e^{-tx}}{t} \right]_0^A = 0$  et l'intégrale est convergente, donc

$$I_n(t) = \frac{n}{t} \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-tx} dx = \frac{n}{t} I_{n-1}(t)$$

Ainsi  $\boxed{I_n(t) = \frac{n}{t} I_{n-1}(t)}.$

c) Montrons le par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  :

- **Initialisation** :

$$I_0(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} dx = \left[ -\frac{e^{-tx}}{t} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{t}.$$

La formule est vraie pour  $n = 0$ .

- **Hérédité** : Supposons  $I_{n-1}(t) = \frac{(n-1)!}{t^n}$  pour un  $n \geq 1$ . Alors

$$I_n(t) = \frac{n}{t} I_{n-1}(t) = \frac{n}{t} \frac{(n-1)!}{t^n} = \frac{n!}{t^{n+1}}$$

La formule est vraie au rang  $n$ .

Ainsi,  $I_n(t) = \frac{n!}{t^{n+1}}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $t > 0$ .

d) D'après Q2 on a  $h_n''(t) = h_{n+2}(t)$ , donc

$$h_n''(t) + h_n(t) = h_{n+2}(t) + h_n(t).$$

utilisons l'expression intégrale de  $h_n$

$$\begin{aligned} h_{n+2}(t) + h_n(t) &= \int_0^{+\infty} \frac{x^{n+2}e^{-tx}}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-tx}}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(x^{n+2} + x^n)e^{-tx}}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{x^n(x^2 + 1)e^{-tx}}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^n e^{-tx} dx \\ &= I_n(t) \end{aligned}$$

D'après 4.c), on a ,

$$h_n''(t) + h_n(t) = \frac{n!}{t^{n+1}}.$$

Ce qui montre que  $h_n$  est une solution particulière de l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_n)$ .

e) On a

$$|h_n(t)| = \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-tx}}{1+x^2} dx \leq \int_0^{+\infty} x^n e^{-tx} dx = I_n(t)$$

or  $I_n(t) = \frac{n!}{t^{n+1}}$  donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} I_n(t) = 0$ , par suite  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h_n(t) = 0$ .

5. a) L'équation homogène  $(\mathcal{E}_H) : y'' + y = 0$ , a pour équation caractéristique est  $r^2 + 1 = 0$ , dont les racines sont  $r_1 = i$  et  $r_2 = -i$ .

Les solutions de  $(\mathcal{E}_H)$  sur  $\mathbb{R}$  (et donc sur  $]0, +\infty[$ ) sont les fonctions de la forme

$$y_H(t) = A \cos(t) + B \sin(t), \text{ où } A, B \in \mathbb{R}.$$

- b) D'après 4.d),  $h_n(t)$  est une solution particulière de  $(\mathcal{E}_n)$ . La solution générale de  $(\mathcal{E}_n)$  sur  $]0, +\infty[$  est donc

$$y(t) = y_H(t) + h_n(t) = A \cos(t) + B \sin(t) + h_n(t).$$

On cherche la solution  $k_n$  telle que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} k_n(t) = 0$ .

Comme  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h_n(t) = 0$  (d'après 4.e)), la condition devient  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (A \cos(t) + B \sin(t)) = 0$ .

Ce qui est réalisé si et seulement si  $A = 0$  et  $B = 0$ . Donc, l'unique solution de  $(\mathcal{E}_n)$  qui admet une limite nulle en  $+\infty$  est  $h_n$ .

### PARTIE 3 :

Une autre expression de  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+x^2} dx$

1. Soit  $\psi(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(s) ds$ . Puisque  $\int_1^{+\infty} \varphi(s) ds$  converge, pour tout  $c \geq 1$ ,  $\int_c^{+\infty} \varphi(s) ds$  converge.  
Soit  $c \in \mathbb{R}^{+*}$ . On peut écrire

$$\psi(x) = \int_c^{+\infty} \varphi(s) ds - \int_c^x \varphi(s) ds.$$

Comme  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathbb{R}$  (donc sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ), d'après le théorème fondamental de l'analyse,  $x \mapsto \int_c^x \varphi(s) ds$  est de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . Par conséquent,  $\psi$  est de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

Pour tout  $j \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$ ,  $\psi^{(j)}(x) = -\varphi^{(j-1)}(x)$ . En particulier, pour  $j = k+1$ , on a  $\psi^{(k+1)}(x) = -\varphi^{(k)}(x)$ .

2. Soit  $t > 0$ .

a) Pour  $s > t$ , posons  $f(x) = \frac{1}{x}$  et  $g'(x) = \sin(x - u)$ . Alors  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$  et  $g(x) = -\cos(x - u)$ .

Une intégration par parties donne

$$\int_t^s \frac{\sin(x - u)}{x} dx = \left[ -\frac{\cos(x - u)}{x} \right]_t^s - \int_t^s \left( -\frac{1}{x^2} \right) (-\cos(x - u)) dx = \frac{\cos(t - u)}{t} - \frac{\cos(s - u)}{s} - \int_t^s \frac{\cos(x - u)}{x^2} dx.$$

b) On a  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\cos(s - u)}{s} = 0$  et

$$\left| \frac{\cos(x - u)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad \int_t^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ converge}$$

Par conséquent, l'intégrale  $\int_t^{+\infty} \frac{\sin(x - u)}{x} dx$  est convergente et

$$\int_t^{+\infty} \frac{\sin(x - u)}{x} dx = \frac{\cos(t - u)}{t} - \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x - u)}{x^2} dx.$$

c) On a

$$\theta(t) = \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x - t)}{x} dx = \int_t^{+\infty} \frac{\cos(t) \sin(x) - \cos(x) \sin(t)}{x} dx$$

remarquons que

$$\phi(t, 0) = \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \quad \text{et} \quad \phi(t, \frac{-\pi}{2}) = \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx$$

donc ces intégrales convergent et

$$\theta(t) = \cos(t) \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx - \sin(t) \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx$$

D'après Q1, les fonctions

$$t \mapsto \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \quad \text{et} \quad t \mapsto \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx$$

sont de classe  $\mathcal{C}^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , donc  $\theta$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

d) On a

$$\begin{aligned} \left( \cos(t) \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \right)' &= (\cos(t))' \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx + \cos(t) \left( \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \right)' \\ &= -\sin(t) \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx - \frac{\sin(t) \cos(t)}{t} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left( \sin(t) \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx \right)' &= (\sin(t))' \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx + \sin(t) \left( \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx \right)' \\ &= \cos(t) \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx - \frac{\sin(t) \cos(t)}{t} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \theta'(t) &= \left( \cos(t) \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \right)' - \left( \sin(t) \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx \right)' \\ &= -\sin(t) \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx - \cos(t) \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \theta''(t) &= - \left( \sin(t) \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \right)' - \left( \cos(t) \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx \right)' \\ &= - \left( \cos(t) \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx - \frac{\sin^2(t)}{t} \right) - \left( -\sin(t) \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx - \frac{\cos^2(t)}{t} \right) \\ &= \sin(t) \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx - \cos(t) \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx + \frac{\sin^2(t) + \cos^2(t)}{t} \end{aligned}$$



Donc,

$$\theta''(t) = -\theta(t) + \frac{1}{t}$$

Ce qui est équivalent à l'équation différentielle :  $\theta''(t) + \theta(t) = \frac{1}{t}$

e) D'après Q2.b , on a

$$\theta(t) = \int_t^{+\infty} \frac{\sin(x-t)}{x} dx = \frac{1}{t} - \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x-t)}{x^2} dx.$$

et

$$\left| \int_t^{+\infty} \frac{\cos(x-t)}{x^2} dx \right| \leq \int_t^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{t}$$

donc

$$|\theta(t)| \leq \frac{2}{t}$$

ce qui donne  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = 0$ .

3. D'après Q5.b de la Partie 2 ,  $h_0$  est l'unique solution de  $(\mathcal{E}_0)$  sur  $]0, +\infty[$  de limite nulle en  $+\infty$ .

D'après Q2. de la Partie 3 ,  $\theta$  est solution de  $(\mathcal{E})$  sur  $]0, +\infty[$  de limite nulle en  $+\infty$ .

Donc  $\theta = h_0$  , ainsi pour tout  $t > 0$  :  $\int_t^{+\infty} \frac{\sin(x-t)}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+x^2} dx$ .

4. Soit  $u_n = \theta(n) = \int_n^{+\infty} \frac{\sin(x-n)}{x} dx$ . D'après la question Q2.b ,  $u_n = \frac{1}{n} - \int_n^{+\infty} \frac{\cos(x-n)}{x^2} dx$ .

Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n} - \left( \left[ \frac{\sin(x-n)}{x^2} \right]_n^{+\infty} + \int_n^{+\infty} \frac{2 \sin(x-n)}{x^3} dx \right) \\ &= \frac{1}{n} - \int_n^{+\infty} \frac{2 \sin(x-n)}{x^3} dx \end{aligned}$$

mais

$$\left| \int_n^{+\infty} \frac{2 \sin(x-n)}{x^3} dx \right| \leq \int_n^{+\infty} \frac{2}{x^3} dx = \frac{1}{n^2}$$

donc

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$  et la série  $\sum u_n$  diverge.

**Autre méthode** : on a

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+x^2} dx \geq \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x^2} dx \geq \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-nx} dx = \frac{1-e^{-n}}{2n}$$

$\frac{1-e^{-n}}{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$  , donc  $\sum \frac{1-e^{-n}}{2n}$  diverge, par suite la série  $\sum u_n$  diverge.

## PARTIE 4 :

**Application : le calcul de  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$**

1. La fonction  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

• **En 0** :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ . La fonction est prolongeable par continuité en 0, donc l'intégrale  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$  converge.

- **En  $+\infty$  :** Soit  $A > 1$ . Une intégration par parties donne :

$$\int_1^A \frac{\sin x}{x} dx = \left[ -\frac{\cos x}{x} \right]_1^A - \int_1^A \left( -\frac{1}{x^2} \right) (-\cos x) dx = -\frac{\cos A}{A} + \cos 1 - \int_1^A \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

On a  $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  converge, donc  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$  converge.

Comme  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\cos A}{A} = 0$ , alors  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{\sin x}{x} dx$  existe. Ainsi l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  est convergente.

**2.** Soit  $t \in \mathbb{R}^{+*}$ .

- a) • La fonction  $x \mapsto \frac{\sin x}{(x+t)x}$  est continue sur  $]0, 1]$  et prolongeable par continuité en 0 (valeur  $1/t$ ), donc

l'intégrale  $\int_0^1 \frac{\sin x}{(x+t)x} dx$  converge.

- On a  $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq 1$ , donc

$$\left| \int_0^1 \frac{\sin x}{(x+t)x} dx \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{\sin x}{x} \right| \frac{1}{x+t} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x+t} dx.$$

- b) Comme  $x \geq 1$  et  $t > 0$ ,  $x+t \geq x$ . Donc

$$\left| \frac{\sin x}{x(x+t)} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

L'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  converge, donc l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x+t)} dx$  est convergente et

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x+t)} dx \right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$$

- c) On a

$$\begin{aligned} \theta(t) - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^\infty \frac{\sin x}{x+t} dx - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \int_0^\infty \sin x \left( \frac{1}{x+t} - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= -t \int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x+t)} dx. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left| \theta(t) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \right| &= t \left| \int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x+t)} dx \right| \\ &\leq t \left( \left| \int_0^1 \frac{\sin x}{x(x+t)} dx \right| + \left| \int_1^\infty \frac{\sin x}{x(x+t)} dx \right| \right) \end{aligned}$$

En utilisant a) et b) :

$$\left| \int_0^1 \frac{\sin x}{x(x+t)} dx \right| \leq \int_0^1 \frac{1}{x+t} dx = [\ln(x+t)]_0^1 = \ln(1+t) - \ln t.$$

et

$$\left| \int_1^\infty \frac{\sin x}{x(x+t)} dx \right| \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\left| \theta(t) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq t(1 + \ln(1+t) - \ln t)}.$$

- 3.** On a  $\lim_{t \rightarrow 0^+} t(1 + \ln(1+t) - \ln t) = 0$ , cela implique

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \theta(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

D'après Partie 3, Q3,  $\theta(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+x^2} dx$ .

Pour calculer  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \theta(t)$ , on utilise le théorème de convergence dominée, version continue :

Soit  $f_t(x) = \frac{e^{-tx}}{1+x^2}$ . On a

- Pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f_t(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .
- Pour tout  $t \geq 0$  et  $x \geq 0$ ,  $|f_t(x)| = \frac{e^{-tx}}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$ .

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ . ( Conditions de domination ).

Par le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \theta(t) = \int_0^{+\infty} \lim_{t \rightarrow 0^+} f_t(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi  $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}}$ .

4. La fonction  $x \mapsto \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$  est continue sur  $]0, +\infty[$  et prolongeable par continuité en 0 (valeur 1).

Comme  $0 \leq \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \leq \frac{1}{x^2}$ . Par comparaison, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$  converge.

Effectuons une intégration par parties :

$$\text{Posons } \begin{cases} u(x) = \sin^2(x) \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases} . \text{ Alors } \begin{cases} u'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin(2x) \\ v(x) = \frac{-1}{x} \end{cases}$$

donc

$$I = \left[ -\frac{\sin^2(x)}{x} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \sin(2x) \left( -\frac{1}{x} \right) dx$$

on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2(x)}{x} = 0$  et  $\frac{\sin^2 x}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ , donc  $\left[ -\frac{\sin^2 x}{x} \right]_0^{+\infty} = 0$ .

Par suite

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x} dx$$

Posons  $y = 2x$ , alors

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y/2} \frac{dy}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy.$$

D'après la question Q3,  $\boxed{I = \frac{\pi}{2}}$ .

5. • La fonction  $g : x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x^2}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

En 0, on a  $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ , donc  $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} + o(1)$ . Donc  $g$  est prolongeable par continuité en 0.

En  $+\infty$ ,  $0 \leq \frac{1 - \cos x}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}$ .

Donc l'intégrale  $J$  converge.

Une intégration par parties donne :

$$J = \left[ -\frac{1 - \cos x}{x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$  et  $\frac{1 - \cos x}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2} + o(x)$ , donc  $\left[ -\frac{1 - \cos x}{x} \right]_0^{+\infty} = 0$ .

Ainsi  $\boxed{J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}}$ .

- La fonction  $h : x \mapsto \frac{\sin^4 x}{x^2}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

En 0, on a  $\frac{\sin^4 x}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$ , donc  $h$  est prolongeable par continuité en 0.

En  $+\infty$ , on a  $0 \leq \frac{\sin^4 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ .

L'intégrale  $K$  converge. Ecrivons

$$\begin{aligned} K &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x \cdot \sin^2 x}{x^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x (1 - \cos^2 x)}{x^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx - \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{x^2} dx. \end{aligned}$$

La première intégrale est  $I = \pi/2$ .

Pour la seconde : on a  $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{\sin^2(2x)}{4}$ , donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(2x)}{4x^2} dx$$

posons  $y = 2x$ .

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 y}{4(y/2)^2} \frac{dy}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 y}{y^2} \frac{dy}{2} = \frac{1}{2} I.$$

Donc  $K = I - \frac{1}{2} I = \frac{1}{2} I$ .

Ainsi  $\boxed{K = \frac{\pi}{4}}$ .