Solution

Problème

1) a) $I = I - A^p = (I-A)(I+A+...+A^{p-1})$ $(car\ \ IA = AI)$

D'où I-A est inversible et $(I-A)^{-1} = (I+A+...+A^{p-1})$.

b) Notons $I - A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$; càd $A = I - \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $A^3 = 0$, alors I-A est inversible, et on a :

$$(I-A)^{-1} = (I + A + A^2) = \begin{pmatrix} 13 & -9 & -5 \\ 3 & -2 & -1 \\ 21 & -15 & -8 \end{pmatrix}$$

2) a) $M^2 - 3M = -2I$.

b) $M^2 - 3M = -2I \Rightarrow \dfrac{-1}{2} M(M-3I) = I$, d'où M est inversible et qu'on a :

$$M^{-1} = \frac{-1}{2}(M-3I) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

c) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2 / M^n = \alpha_n M + \beta_n I_3$; en effet :

Pour n=0 : on a $M^0 = I_3$, $on\ \ prend\ \ \alpha_0 = 0\ et\ \ \beta_0 = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons qu'il existe $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2 / M^n = \alpha_n M + \beta_n I_3$.

Montrons qu'il existe $(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}) \in \mathbb{R}^2 / M^{n+1} = \alpha_{n+1} M + \beta_{n+1} I_3$:

On a :

$$\begin{aligned}
M^{n+1} &= M.M^n \\
&= M(\alpha_n M + \beta_n I_3)\ \ (Hypothèse\ de\ récurrence) \\
&= \alpha_n M^2 + \beta_n M \\
&= \alpha_n (3M - 2I) + \beta_n M \quad (car\ \ M^2 = 3M - 2I;\ question\ 2)a)) \\
&= (3\alpha_n + \beta_n) M - 2\alpha_n I\ ;\ d'où\, le\ résultat\ voulu\ avec\ \alpha_{n+1} = 3\alpha_n + \beta_n\ \ et\ \ \beta_{n+1} = -2\alpha_n
\end{aligned}$$

d) L'unicité du couple (α_n, β_n) :

Supposons qu'il existe $(\alpha'_n, \beta'_n) \in \mathbb{R}^2 / M^n = \alpha'_n M + \beta'_n I_3$..

Montrons que : $(\alpha_n, \beta_n) = (\alpha'_n, \beta'_n)$. On a :

$$\begin{cases} M^n = \alpha_n M + \beta_n I_3. \\ M^n = \alpha'_n M + \beta'_n I_3. \end{cases} \Rightarrow (\alpha_n - \alpha'_n) M + (\beta_n - \beta'_n) I_3 = O_3$$

$$\Rightarrow aM + bI_3 = O_3\ ;\ où\ \ a = \alpha_n - \alpha'_n\ \ et\ \ b = \beta_n - \beta'_n$$

$$\Rightarrow a = 0\ \ et\ \ b = 0$$

D'où $(\alpha_n, \beta_n) = (\alpha'_n, \beta'_n)$.

e) En bref :

$X^n = (X^2 - 3X + 2).Q(X) + (aX + b).$

$X^2 - 3X + 2 \;\; a \;\; pour \;\; racines \;\; 1 \;\; et \;\; 2.$

En donnant à X les valeurs 1 et 2 respectivement on trouve :

$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 2^n \end{cases}$, donc $a = 2^n - 1 \;\; et \;\; b = 2 - 2^n$.

Le reste donc est aX+b avec $a = 2^n - 1 \;\; et \;\; b = 2 - 2^n$.

f)

$$X^n = (X^2 - 3X + 2).Q(X) + (aX + b) \Rightarrow M^n = (M^2 - 3M + 2I).Q(M) + (aM + bI)$$

$$\Rightarrow M^n = aM + bI \quad car\; M^2 - 3M + 2I = 0$$

Avec $a = 2^n - 1 \;\; et \;\; b = 2 - 2^n$.

Et vu l'unicité on a : $\alpha_n = 2^n - 1 \;\; et \;\; \beta_n = 2 - 2^n$