

Épreuve de Mathématiques
(toutes filières)

Lundi 22 mai 2000 de 14h00 à 18h00

Extrait

ALGÈBRE

Les parties I, II et III sont, dans une large mesure, indépendantes.

Soit n un entier naturel non nul.

Partie I :

On pose : $A = (X + 1)^{2n} - 1$, polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

1. – Montrer que l'on peut écrire : $A = X \times B$ où B est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont on précisera le deg le coefficient dominant et le terme constant noté b_0 .
2. – Déterminer les racines de A dans $\mathbb{C}$. On posera $z_0 = 0$ et les autres racines $z_1, z_2, \dots, z_{2n-1}$ seront mises sous forme trigonométrique.

On pose $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$.

3. – Montrer, à l'aide d'un changement d'indice, que $P_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$.

En déduire que, si $Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$, alors $P_n = \sqrt{Q_n}$.

4. – Calculer de deux façons : $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$. Puis, en déduire Q_n et enfin, P_n .

5. – On pose $F = \frac{1}{A}$. Déterminer la décomposition de F en éléments simples sur $\mathbb{C}$.

Partie II :

On travaille dans un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E supposé non réduit au vecteur nul. $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E , I_E est l'application identité de E et θ désigne l'application nulle.

Par convention : $\forall f \in \mathcal{L}(E), f^0 = I_E$.

On étudie, sur quelques cas particuliers, l'équation : $(f + I_E)^{2n} - I_E = \theta$ où $f \in \mathcal{L}(E)$ est l'inconnue.

6. – Déterminer les homothéties vectorielles qui sont solutions de l'équation proposée.

7. – En développant $(1 + 1)^{2n}$ et $(1 - 1)^{2n}$ déterminer les sommes $S = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k}$ et $S' = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$.

(la notation $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial : $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.)

8. – Si s est une symétrie de E , exprimer $(s + I_E)^{2n} - I_E$ en fonction de s et I_E .

En déduire les symétries de E solutions de l'équation proposée.

Partie III :

On travaille dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{C}$.

I désigne la matrice identité et O la matrice nulle.

On pose $G = \{M_{a,b} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mid (a,b) \in \mathbb{C}^2\}$ où $M_{a,b}$ désigne la matrice $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

9. – Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ dont on précisera la dimension et une base ; vérifier que G est stable pour le produit matriciel.

On cherche à résoudre l'équation matricielle (*) $(M + I)^{2n} - I = O$, avec M , matrice inconnue, dans G .

On note E le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E .

Soient $M = M_{a,b}$ un élément de F tel que $b \neq 0$, u l'endomorphisme de E canoniquement associé à M et I_E , l'application identité de E .

10. – Déterminer une base (e'_1) de $E_1 = \text{Ker}(u - (a + 2b).I_E)$.

11. – Déterminer une base (e'_2, e'_3) de $E_2 = \text{Ker}(u - (a - b).I_E)$.

12. – Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E ; on la note $\mathcal{B}'$.

13. – Déterminer la matrice D de u dans la base $\mathcal{B}'$.

14. – On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Écrire P et déterminer P^{-1} en précisant la méthode utilisée et en détaillant les calculs.

15. – Exprimer M en fonction de P , D et P^{-1} .

16. – Montrer que : M est solution de l'équation (*) si et seulement si D est solution de l'équation (*).

17. – Déterminer toutes les matrices D solutions de l'équation (*).

18. – En déduire toutes les solutions de l'équation (*) dans G .

FIN