

INTÉGRALES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

I) Passage à la limite sous intégrale

Théorème 1 : (Théorème de la convergence dominée)

Si $\begin{cases} 1) \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ CPM sur } I \\ 2) (f_n) \text{ CS vers } f \text{ sur } I, \text{ et } f \text{ CPM sur } I \\ 3) \text{ Il existe } \varphi \text{ CPM et intégrable sur } I \text{ telle que : } (\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \preceq \varphi) \end{cases}$
(hypothèse de domination)

Alors $\begin{cases} 1) f \text{ et les } f_n \text{ sont intégrables sur } I \\ 2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_I f_n \right) = \int_I (\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n) \end{cases}$

Exercice 1 (Solution en page 9)

$$\text{Calculer } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{\pi/4} (\tan t)^n dt \right).$$

Exercice 2 (Solution en page 13)

$$\text{Calculer } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^n + e^t} dt \right).$$

Théorème 2 : (Intégration terme à terme d'une série de fonctions)

Si $\left\{ \begin{array}{l} 1) \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ CPM et intégrable sur } I \\ 2) \sum_n f_n \text{ CS vers } f \text{ sur } I, \text{ et que } f \text{ est CPM sur } I \\ 3) \text{ La série } \sum_n \left(\int_I |f_n| \right) \text{ converge} \end{array} \right.$

Alors $\left\{ \begin{array}{l} 1) f \text{ est intégrable sur } I \\ 2) \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n \right) \end{array} \right.$

Remarque pratique :

Dans la pratique, on commence par effectuer un calcul formel où l'on permute les symboles $\sum$ et $\int$, que l'on justifie par la suite.

Exercice 3 (Solution en page 17)

1) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$ converge via les outils des intégrales impropres.

2) Redémontrer l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$, et qu'elle est égale à $\zeta(2)$.

Rappel (Fonction zêta de Riemann)

$$\forall x > 1, \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Exercice 4 (Solution en page 24)

1) Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt$ converge via les outils des intégrales impropres.

2) Redémontrer l'existence de $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt$, et qu'elle est égale à $-\frac{3}{4} \zeta(2)$.

II) Continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre

Théorème : (Continuité)

A une partie d'un evn de dimension finie. I intervalle de $\mathbb{R}$.

$f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K}; (x, t) \longmapsto f(x, t)$.

Si $\left\{ \begin{array}{l} 1) \forall t \in I, x \longmapsto f(x, t) \text{ est continue sur } A \\ 2) \forall x \in A, t \longmapsto f(x, t) \text{ est CPM sur } I \\ 3) \text{ Il existe } \varphi \text{ CPM et intégrable sur } I \text{ telle que : } (\forall (x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)) \end{array} \right.$
(hypothèse de domination)

Alors $\left(g : x \longmapsto \int_I f(x, t) dt \text{ est continue sur } A \right)$

NB : (Un cas fréquent)

Si A est un intervalle de $\mathbb{R}$, il suffit que l'hypothèse de domination soit vérifiée sur tout segment $[a, b]$ de A .

Exercice 5 (Solution en page 31)

Considérons la fonction $g : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$.

- 1) Déterminer D_g ; le domaine de définition de g .
- 2) Montrer que g est continue sur D_g .

Exercice 6 (Solution en page 35)

Considérons la fonction $h : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

- 1) Montrer que $D_h = [0, +\infty[$.
- 2) Montrer que h est continue $[0, +\infty[$.

III) Limites

Théorème (Intervention limite-intégrale)

Soit $f : J \times I \longrightarrow \mathbb{K}$; où I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Soit a une extrémité de J .

Si $\left\{ \begin{array}{l} 1) \forall x \in J, t \longmapsto f(x, t) \text{ est CPM sur } I \\ 2) \forall t \in I, \lim_{x \rightarrow a} f(x, t) = l(t) \text{ avec } l \text{ est CPM sur } I \\ 3) \text{ Il existe } \varphi \text{ CPM et intégrable sur } I \text{ telle que : } (\forall (x, t) \in J \times I, |f(x, t)| \preceq \varphi(t)) \\ \text{(hypothèse de domination)} \end{array} \right.$

Alors $\lim_{x \rightarrow a} \left(\int_I f(x, t) dt \right) = \int_I \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x, t) \right) dt$

Exercice 7 (Solution en page 40)

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-xt} dt \right)$.

IV) Dérivation

Théorème 1 : (Classe C^1)

I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : J \times I \longrightarrow \mathbb{K}; (x, t) \longmapsto f(x, t)$.

Si $\left\{ \begin{array}{l} 1) \forall t \in I, x \longmapsto f(x, t) \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } J \\ 2) \forall x \in J, t \longmapsto f(x, t) \text{ est CPM et intégrable sur } I \\ 3) \forall x \in J, t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \text{ est CPM sur } I \\ 4) \text{ Il existe } \varphi \text{ CPM et intégrable sur } I \text{ telle que : } \left(\forall (x, t) \in J \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \preceq \varphi(t) \right) \\ \text{(hypothèse de domination)} \end{array} \right.$

Alors $\left\{ \begin{array}{l} 1) g : x \longmapsto \int_I f(x, t) dt \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } J \\ 2) \forall x \in J, g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \text{ (dite formule de Leibniz)} \end{array} \right.$

NB :

Pour l'hypothèse de domination, il suffit de l'avoir sur tout segment inclus dans J . c-à-d :

Pour tout $[a, b] \subset J$. Il existe φ CPM et intégrable sur I telle que :

$$\left(\forall (x, t) \in [a, b] \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \preceq \varphi(t) \right)$$

Exercice 8 (Solution en page 43)

Considérons la fonction $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$.

On donne que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (dite intégrale de Gauss).

1) Montrer que g est définie sur $[0, +\infty[$.

2) Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$, et qu'elle est solution de l'équation différentielle $y' - y = \frac{-\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.

Théorème 2 : (Classe C^n)

I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : J \times I \longrightarrow \mathbb{K}; (x, t) \longmapsto f(x, t)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Si $\left\{ \begin{array}{l} 1) \forall t \in I, x \longmapsto f(x, t) \text{ est de classe } C^n \text{ sur } J \\ 2) \forall x \in J, \forall 0 \leq i \leq n-1, t \longmapsto \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t) \text{ est CPM et intégrable sur } I \\ 3) \forall x \in J, t \longmapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \text{ est CPM sur } I \\ 4) \forall [a, b] \subset J. \text{ Il existe } \varphi \text{ CPM et intégrable sur } I \text{ telle que :} \\ \quad \left(\forall (x, t) \in [a, b] \times I, \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \right) \\ \quad (\text{hypothèse de domination}) \end{array} \right.$

Alors $\left\{ \begin{array}{l} 1) g : x \longmapsto \int_I f(x, t) dt \text{ est de classe } C^n \text{ sur } J \\ 2) \forall 1 \leq i \leq n, \forall x \in J, g^{(i)}(x) = \int_I \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t) dt \end{array} \right.$

Exercice 9 (Solution en page 47)

Considérons la fonction $g: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

1) Montrer que g est définie sur $]0, +\infty[$.

2) Montrer que g est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$, et qu'elle est solution de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$,

Théorème 3 : (Classe C^∞)

I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : J \times I \longrightarrow \mathbb{K}; (x, t) \longmapsto f(x, t)$.

Si $\left\{ \begin{array}{l} 1) \forall t \in I, x \longmapsto f(x, t) \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } J \\ 2) \forall x \in J, t \longmapsto f(x, t) \text{ est CPM et intégrable sur } I \\ 3) \forall x \in J, \forall n \geq 1, t \longmapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \text{ est CPM sur } I \\ 4) \forall [a, b] \subset J, \forall n \geq 1, \text{ Il existe } \varphi \text{ CPM et intégrable sur } I \text{ telle que :} \\ \left(\forall (x, t) \in [a, b] \times I, \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \right) \\ \text{(hypothèse de domination)} \end{array} \right.$

Alors $\left\{ \begin{array}{l} 1) g : x \longmapsto \int_I f(x, t) dt \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } J \\ 2) \forall n \geq 1, \forall x \in J, g^{(n)}(x) = \int_I \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) dt \end{array} \right.$

Exercice 10 (Solution en page 53)

Considérons la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx} dt$.

1) Montrer que F est bien définie sur $[0, +\infty[$.

2) Montrer que F est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$.

3) Calculer $F^{(n)}(0)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

FIN

Solutions des exercices d'applications

Exercice 1

$$\text{Calculer } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{\pi/4} (\tan t)^n dt \right).$$

NB

Notons : $\left(\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, \pi/4], f_n(t) = (\tan t)^n \right)$

$$\text{On vise : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{\pi/4} f_n(t) dt \right) = \int_0^{\pi/4} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right) dt.$$

On est dans le segment $[0, \frac{\pi}{4}]$.

On peut espérer appliquer le chapitre ^K Suites et séries de fonctions. ⁷⁷

Mais on ne peut pas, vu qu'on trouvera, après calculs, que

la suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Vous trouverez que $(f_n)_n$ converge simplement vers la

fonction f définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \frac{\pi}{4}[\\ 1 & \text{si } t = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Maïs (f_n) ne CV pas unif vers f sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Car $\begin{cases} \forall n, f_n: t \mapsto (t \sin t)^n \text{ continue sur } [0, \frac{\pi}{4}] \\ \text{alors que } f \text{ n'est pas continue sur } [0, \frac{\pi}{4}] \end{cases}$

Conclusion:

Le chapitre "Suites et séries de fonctions" n'est pas applicable.

On appliquera ce chapitre en cours.

Fin **NB**

Exercice 1

$$\text{Calculer } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{\pi/4} (\tan t)^n dt \right).$$

Solution

$$\text{Notons : } \left(\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, \pi/4], f_n(t) = (\tan t)^n \right)$$

$$\text{On vise : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{\pi/4} f_n(t) dt \right) = \int_0^{\pi/4} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right) dt.$$

Théorème 1 : (Théorème de la convergence dominée)

Si $\begin{cases} 1) \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ CPM sur } I \\ 2) (f_n) \text{ CS vers } f \text{ sur } I, \text{ et } f \text{ CPM sur } I \\ 3) \text{ Il existe } \varphi \text{ CPM et intégrable sur } I \text{ telle que : } (\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi) \end{cases}$
(hypothèse de domination)

Alors $\begin{cases} 1) f \text{ et les } f_n \text{ sont intégrables sur } I \\ 2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_I f_n \right) = \int_I (\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n) \end{cases}$

On a :

1) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est CPM (car continue) sur $[0, \pi/4]$.

2) (f_n) CS sur $[0, \pi/4]$?

Soit $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\tan t)^n =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \frac{\pi}{4}[\text{ (car } 0 \leq \tan t < 1) \\ 1 & \text{si } t = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$f_n(t) = (\tan t)^n$$

2) où $(f_n)_n$ CS vers f sur $[0, \frac{\pi}{4}]$; où : $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \frac{\pi}{4}[\\ 1 & \text{si } t = \frac{\pi}{4} \end{cases}$
 Et f CPM sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

3) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$. On a :

$$|f_n(t)| = |(f_n(t))^n| \leq 1 = \varphi(t) \text{ ; où } \varphi(t) = 1, \text{ pour tout } t \in [0, \frac{\pi}{4}].$$

i) φ est bien CPM sur $[0, \frac{\pi}{4}]$

ii) φ est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ car φ CPM sur le segment $[0, \frac{\pi}{4}]$.

De 1), 2) et 3) on tire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} f_n(t) dt \right) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t) dt$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \frac{\pi}{4}[\\ 1 & \text{si } t = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} f_n(t) dt \right) = 0$$

□

Fin Exercice 1

Exercice 2

$$\text{Calculer } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^n + e^t} dt \right).$$

Solution

$$\text{Notons : } f_n(t) = \frac{1}{t^n + e^t}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ et } t \in [0, +\infty[.$$

$$\text{On veut Calculer } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(t) dt \right).$$

On visera : 

Théorème 1 : (Théorème de la convergence dominée)

Si $\begin{cases} 1) \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ CPM sur } I \\ 2) (f_n) \text{ CS vers } f \text{ sur } I, \text{ et } f \text{ CPM sur } I \\ 3) \text{ Il existe } \varphi \text{ CPM et intégrable sur } I \text{ telle que : } (\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi) \end{cases}$
(hypothèse de domination)

Alors $\begin{cases} 1) f \text{ et les } f_n \text{ sont intégrables sur } I \\ 2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_I f_n \right) = \int_I (\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n) \end{cases}$

1) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est CPM (car continue) sur $[0, +\infty[$.

$$f_n(t) = \frac{1}{t^n + e^t}$$

2) (f_n) CS sur $[0, +\infty[$?

Soit $t \in [0, +\infty[$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^n + e^t}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t^n = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } t = 1 \\ +\infty & \text{si } t \in]1, +\infty[\end{cases}$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{e^t} = e^{-t} & \text{si } t \in [0, 1[\\ \frac{1}{1+e} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t \in]1, +\infty[\end{cases}$$

Ainsi, $(f_n)_n$ CS vers f sur $[0, +\infty[$; où :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{e^t} = e^{-t} & \text{si } t \in [0, 1[\\ \frac{1}{1+e} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t \in]1, +\infty[\end{cases}$$

et f est CPM sur $[0, +\infty[$.

3) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, +\infty[$.

$$|f_n(t)| = \frac{1}{t^n + e^t}$$

$$\leq \frac{1}{e^t} = e^{-t} = \varphi(t).$$

$$2^{\text{eu}} : \left(\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, +\infty[, |f_n(t)| \leq \varphi(t) \right)$$

$$e^{-t} = \varphi(t)$$

Et $\varphi \in CPM$ sur $[0, +\infty[$.

φ intégrable sur $[0, +\infty[$; car $\varphi(t) = e^{-t} = e^{-\lambda t}$ ($\lambda=1 > 0$)

De 1), 2) et 3) on tire que :

A) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : t \mapsto \frac{1}{t^n + e^t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

et que f est aussi intégrable sur $[0, +\infty[$.

$$\mathbf{B)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^n + e^t} dt \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(t) dt \right)$$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{e^t} = e^{-t} & \text{si } t \in [0, 1[\\ \frac{1}{1+e} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t \in]1, +\infty[\end{cases}$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t) dt$$

$$= \int_0^1 e^{-t} dt$$

$$= \left[-e^{-t} \right]_0^1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^n + e^t} dt \right) = 1 - e^{-1}$$

Fin Exercice 2

Exercice 3

1) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$ converge via les outils des intégrales impropres.

2) Redémontrer l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$, et qu'elle est égale à $\zeta(2)$.

Solution

1) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$ converge via les outils des intégrales impropres.

La fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t - 1}$ est CPM sur $]0, +\infty[$.

A) $\int_0^1 \frac{t}{e^t - 1} dt$ converge ?

$$\frac{t}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1 \quad \text{car } (e^t - 1) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$$

$$\text{d'où } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Par suite } \int_0^1 \frac{t}{e^t - 1} dt \text{ converge.} \quad \square$$

$$B) \int_1^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt \text{ converge ?}$$

$$\text{On a } \frac{t}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t}{e^t} = t e^{-t}.$$

$$\int_1^{+\infty} t e^{-t} dt \text{ converge, en effet:}$$

$$t e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \left(\text{car } (t e^{-t}) \cdot t^2 \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 ; \text{ croissance comparée} \right)$$

$$\text{et } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \text{ CV (Riemann)}$$

$$\text{d'où } \int_1^{+\infty} t e^{-t} dt \text{ CV}$$

$$\text{Ainsi } \int_1^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt \text{ converge } \left(\text{car } \frac{t}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t e^{-t} \right)$$

$$\text{Donc } \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt \text{ converge.}$$



2) Redémontrer l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$, et

qu'elle est égale à $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

On a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} t \cdot \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt$$

$$\frac{1}{e^t - 1} = -\frac{1}{1 - e^t} = -\sum_{n=0}^{+\infty} (e^t)^n$$
$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-t e^{nt})$$

$$\text{Or on a : } \forall t \in]0, +\infty[, \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-t})^n \quad \left(\text{car } |e^{-t}| = e^{-t} < 1 \right)$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} \left(t \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} \right) dt$$
$$= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t e^{-nt} \right) dt$$

$$\text{Notons : } \left(\forall n \geq 1, \forall t \in]0, +\infty[, f_n(t) = t e^{-nt} \right)$$

$$On a : \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \right) dt$$

On verra à intervertir $\int_0^{+\infty}$ avec $\sum_{n=1}^{+\infty}$ etc.

Rappel

Théorème 2 : (Intégration terme à terme d'une série de fonctions)

Si $\left\{ \begin{array}{l} 1) \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ CPM et intégrable sur } I \\ 2) \sum_n f_n \text{ CS vers } f \text{ sur } I, \text{ et que } f \text{ est CPM sur } I \\ 3) \text{ La série } \sum_n \left(\int_I |f_n| \right) \text{ converge} \end{array} \right.$

Alors $\left\{ \begin{array}{l} 1) f \text{ est intégrable sur } I \\ 2) \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n \right) \end{array} \right.$

$$f_n(t) = t e^{-nt}$$

i) $\forall n \geq 1, f_n : t \mapsto t e^{-nt}$ est CPM sur $]0, +\infty[$.

f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$; en effet :

Il s'agit de montrer que $\int_0^{+\infty} t e^{-nt} dt$ converge, (car $f_n \geq 0$)

$\int_0^1 t e^{-nt} dt$ converge, car $\lim_{t \rightarrow 0} t e^{-nt} = 0 \in \mathbb{R}$.

$$\int_1^{+\infty} t e^{-nt} dt \text{ Converge car } t e^{-nt} = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ par } t \rightarrow +\infty$$

Croissance comparée.

Et on a $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (Riemann).

Ainsi : $\int_0^{+\infty} t e^{-nt} dt$ Converge.

$$f_n(t) = t e^{-nt}$$

ii) La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n(t)$ converge simplement

sur $]0, +\infty[$ vers $f : t \mapsto f(t) = \frac{t}{e^t - 1}$. (ou ci-dessus)

Et f est CPM sur $]0, +\infty[$.

iii) Montrons que la série numérique $\sum_{n \geq 1} \left(\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt \right)$ converge.

Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt &= \int_0^{+\infty} t e^{-nt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-nt}}{-n} \right)' \cdot t dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{IPP} &= \left[\frac{e^{-nt}}{-n} \cdot t \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{-n} dt \\
 &= \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(\frac{-1}{n} \cdot t e^{-nt} \right)}_{=0, \text{ par croissance composée}} - 0 \right) + \frac{1}{n} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-nt} dt}_{= \frac{1}{n}}
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \left(\forall n \geq 1, \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \frac{1}{n^2} \right)$$

Et l'on a que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann).

D'où la série numérique $\sum_{n \geq 1} \left(\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt \right)$ converge.

De **i)**, **ii)** et **iii)** on tire que :

$f : t \mapsto f(t) = \frac{t}{e^t - 1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$

Càd $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$ converge

Et qu'on a aussi :

$$f_n(t) = t e^{-nt}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \right) dt \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\underbrace{\int_0^{+\infty} f_n(t) dt}_{= \frac{1}{n^2}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \zeta(2)$$

Fin Exercise 3

Exercice 4

1) Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt$ converge via les outils des intégrales impropres.

2) Redémontrer l'existence de $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt$, et qu'elle est égale à $-\frac{3}{4} \zeta(2)$.

Solution

1) Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt$ converge via les outils des intégrales impropres.

La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{1-t^2}$ est CPM sur $]0, 1[$.

A) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln t}{1-t^2} dt$ converge ?

$$\frac{\ln t}{1-t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln t, \text{ car } (1-t^2) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1$$

et $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln t dt$ converge (c'est du cours)

D'où $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln t}{1-t^2} dt$ Converge .

B) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt$ Converge ?

$\ln t \sim (t-1)$ (équivalent usuel)
 $t \rightarrow 1$

$\Rightarrow \frac{\ln t}{1-t^2} = \frac{-\ln t}{(t-1)(t+1)} \sim_{t \rightarrow 1} \frac{-1}{2}$

D'où $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln t}{1-t^2} = \frac{-1}{2} \in \mathbb{R}$

Par suite $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt$ Converge .

Enfin : $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt$ Converge



2) Redémontrer l'existence de $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt$, et
 qu'elle est égale à $-\frac{3}{4} \zeta(2)$.

On a :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt = \int_0^1 \ln(t) \cdot \frac{1}{1-t^2} dt$$

$$= \int_0^1 \left(\ln(t) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (t^2)^n \right) dt \quad \left(\begin{array}{l} \text{Car } \forall t \in]0,1[\\ |t^2| < 1 \end{array} \right)$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \ln t \right) dt$$

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt$$

$$\text{où : } \left(\forall n \geq 0, \forall t \in]0,1[, f_n(t) = t^{2n} \ln t \right)$$

On verra à intervertir $\int_0^1$ avec $\sum_{n=0}^{+\infty}$ et c.

Rappel

Théorème 2 : (Intégration terme à terme d'une série de fonctions)

Si $\left\{ \begin{array}{l} 1) \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ CPM et intégrable sur } I \\ 2) \sum_n f_n \text{ CS vers } f \text{ sur } I, \text{ et que } f \text{ est CPM sur } I \\ 3) \text{ La série } \sum_n \left(\int_I |f_n| \right) \text{ converge} \end{array} \right.$

Alors $\left\{ \begin{array}{l} 1) f \text{ est intégrable sur } I \\ 2) \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n \right) \end{array} \right.$

$$f_n(t) = t^{2n} \ln t$$

i) $\forall n \geq 0$, $f_n: t \mapsto t^{z_n} \ln t$ est CPM sur $]0, 1[$.

f_n est intégrable sur $]0, 1[$; en effet :

Il s'agit de montrer que $\int_0^1 t^{z_n} \ln t \, dt$ converge, (car $f_n \leq 0$)

★ $\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{z_n} \ln t \, dt$ converge car $\lim_{t \rightarrow 1} t^{z_n} \ln t = 0 \in \mathbb{R}$.

★ $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{z_n} \ln t \, dt$ converge car $t^{z_n} \ln t = \left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \right)$ par

croissance comparée au voisinage de 0.

Et on a $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \, dt$ converge, d'après Riemann et $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.

Ainsi $\int_0^1 t^{z_n} \ln t \, dt$ converge. 

ii) La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n(t)$ converge simplement

sur $]0, 1[$ vers $f: t \mapsto f(t) = \frac{\ln t}{1-t^2}$ (ou ci-dessus)

Et f est CPM sur $]0, 1[$.

iii) Montrons que la série numérique $\sum_{n \geq 0} \left(\int_0^1 |f_n(t)| dt \right)$ converge.

Soit $n \geq 0$.

$$f_n(t) = t^{2n} \ln t$$

$$\int_0^1 |f_n(t)| dt = - \int_0^1 t^{2n} \ln t dt$$

$$= - \int_0^1 \left(\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right)' \ln t dt$$

$$\text{IPP} = - \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \cdot \ln t \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \cdot (\ln t)' dt$$

$$= \left(0 + \frac{1}{2n+1} \lim_{t \rightarrow 0} \left(t^{2n+1} \ln t \right) \right) + \frac{1}{2n+1} \int_0^1 t^{2n} dt$$

$= 0$, par croissance comparée au voisinage de 0

$= \frac{1}{2n+1}$

$$\int_0^1 |f_n(t)| dt = \frac{1}{(2n+1)^2}$$

et la série $\sum_n \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge, car $\frac{1}{(2n+1)^2} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n^2}$, et

que $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann).

D'où la série numérique $\sum_{n \geq 0} \left(\int_0^1 |f_n(t)| dt \right)$ converge. □

De i), ii) et iii) on tire que :

$f : t \mapsto f(t) = \frac{\ln t}{1-t^2}$ est intégrable sur $]0,1[$.

Càd $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt$ converge.

Et qu'on a aussi :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\underbrace{\int_0^1 f_n(t) dt}_{= \frac{-1}{(2n+1)^2}} \right) \end{aligned}$$

$$f_n(t) = t^{2n} \ln t$$

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \\ \Rightarrow \zeta(2) &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \zeta(2) = \frac{1}{4} \zeta(2) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4} \zeta(2)$$

Enfin :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt = -\frac{3}{4} \zeta(2)$$

Fin Exercice 4

Exercice 5

Considérons la fonction $g: x \mapsto \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$.

- 1) Déterminer D_g ; le domaine de définition de g .
- 2) Montrer que g est continue sur D_g .

Solution

- 1) Déterminer D_g ; le domaine de définition de g .

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$g(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$$

$$x \in D_g \Leftrightarrow g(x) \text{ existe}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt \text{ converge (cad existe)}$$

La fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t} = \frac{1}{1+t} \times \frac{1}{t^{1-x}}$ est CPM sur $]0, 1]$.

$$\frac{t^{x-1}}{1+t} = \frac{1}{1+t} \times \frac{1}{t^{1-x}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$$

$$\text{Ainsi: } \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt \text{ converge} \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}} dt \text{ converge}$$

$$\Leftrightarrow 1-x < 1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{Intégrale de} \\ \text{Riemann} \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow x > 0$$

Enfin :

$$\mathcal{D}_g =]0, +\infty[$$



2) Montrer que g est continue sur $\mathcal{D}_g$.

Montrons que g est continue sur $]0, +\infty[$.

$$g(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$$

$$\text{On a : } \forall x \in]0, +\infty[, g(x) = \int_0^1 f(x, t) dt$$

$$\text{Où : } f(x, t) = \frac{t^{x-1}}{1+t}, \text{ pour tout } (x, t) \in \underbrace{]0, +\infty[}_A \times \underbrace{]0, 1]_I}.$$

Théorème : (Continuité)

A une partie d'un evn de dimension finie. I intervalle de $\mathbb{R}$.

$f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}; (x, t) \mapsto f(x, t)$.

Si $\left\{ \begin{array}{l} 1) \forall t \in I, x \mapsto f(x, t) \text{ est continue sur } A \\ 2) \forall x \in A, t \mapsto f(x, t) \text{ est CPM sur } I \\ 3) \text{ Il existe } \varphi \text{ CPM et intégrable sur } I \text{ telle que : } (\forall (x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)) \end{array} \right.$
(hypothèse de domination)

Alors $\left(g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt \text{ est continue sur } A \right)$

NB : (Un cas fréquent)

Si A est un intervalle de $\mathbb{R}$, il suffit que l'hypothèse de domination soit vérifiée sur tout segment $[a, b]$ de A .

ne dépend pas de x

i) Soit $t \in]0, 1]$, la fonction $x \mapsto f(x, t) = \frac{t^{x-1}}{1+t}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

ii) Soit $\alpha \in]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto f(\alpha, t) = \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}$ est CPM sur $]0, 1]$.

iii) Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$, ($0 < a < b$)

Soient $\alpha \in [a, b]$ et $t \in]0, 1]$. On a :

$$\begin{aligned} |f(\alpha, t)| &= \left| \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} \right| \\ &= \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} \\ &= \frac{e^{(\alpha-1) \ln t}}{1+t} \end{aligned}$$

$$a \leq \alpha \leq b \Rightarrow a-1 \leq \alpha-1 \leq b-1$$

$$\Rightarrow (\alpha-1) \ln t \leq (a-1) \ln t \quad (\text{car } \ln t \leq 0)$$

$$\text{Donc : } |f(\alpha, t)| \leq e^{(a-1) \ln t} \quad \left(\text{car } \frac{1}{1+t} \leq 1 \right)$$

$$\leq \frac{1}{t^{1-a}} = \varphi(t)$$

φ est CPM sur $]0, 1]$ et intégrable, car $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-a}} dt$

Converge, somme intégrale de Riemann ($1-a < 1$ car $a > 0$).

De *i)*, *ii)* et *iii)* on tire que g est continue

sur $]0, +\infty[$.

Fin Exercice 5

Exercice 6

Considérons la fonction $h : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

1) Montrer que $D_h = [0, +\infty[$.

2) Montrer que h est continue $[0, +\infty[$.

Solution

1) Montrer que $D_h = [0, +\infty[$.

$$h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x \in D_h \Leftrightarrow h(x) \text{ existe}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \text{ converge (càd existe)}$$

La fonction $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est CPM sur $[0, +\infty[$.

$$\frac{e^{-xt}}{1+t^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-xt}}{t^2}$$

$$\text{Alors: } \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \text{ converge} \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^2} dt \text{ converge}$$

D'où :

$$\alpha \in \mathcal{D}_h \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}}{t^2} dt \text{ converge}$$

Cas 1 : Si $\alpha > 0$

$$\text{On a } \frac{e^{-\alpha t}}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$$\text{Or } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \text{ converge (Riemann)}$$

$$\text{Alors } \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}}{t^2} dt \text{ converge.}$$

Et donc $\alpha \in \mathcal{D}_h$.

Cas 2 : Si $\alpha = 0$

$$\text{On a } \frac{e^{-\alpha t}}{t^2} = \frac{1}{t^2} \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \text{ converge}$$

$$\text{Alors } \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}}{t^2} dt \text{ converge.}$$

Et donc $\alpha \in \mathcal{D}_h$.

Cas 3 : Si $x < 0$

$$x \in \mathcal{D}_h \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^2} dt \text{ converge}$$

On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-xt}}{t^2} = +\infty$, par croissance comparée.

$$\text{D'où } \left(\exists A > 1, \forall t \in [A, +\infty[, \frac{e^{-xt}}{t^2} > 1 \right)$$

Or $\int_A^{+\infty} 1 dt$ diverge, alors $\int_A^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^2} dt$ diverge.

Et donc $x \notin \mathcal{D}_h$.

Enfin :

$$\mathcal{D}_h = [0, +\infty[$$



2) Montrer que h est continue $[0, +\infty[$.

$$h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$$

$$\text{On a : } \forall x \in [0, +\infty[, h(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$$

$$\text{Où : } f(x, t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}, \text{ pour tout } (x, t) \in \underbrace{[0, +\infty[}_A \times \underbrace{[0, +\infty[}_I.$$

Théorème : (Continuité)

A une partie d'un evn de dimension finie. I intervalle de $\mathbb{R}$.

$f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}; (x, t) \mapsto f(x, t)$.

Si $\left\{ \begin{array}{l} 1) \forall t \in I, x \mapsto f(x, t) \text{ est continue sur } A \\ 2) \forall x \in A, t \mapsto f(x, t) \text{ est CPM sur } I \\ 3) \text{ Il existe } \varphi \text{ CPM et intégrable sur } I \text{ telle que : } (\forall (x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)) \end{array} \right.$
(hypothèse de domination)

Alors $\left(g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt \text{ est continue sur } A \right)$

NB : (Un cas fréquent)

Si A est un intervalle de $\mathbb{R}$, il suffit que l'hypothèse de domination soit vérifiée sur tout segment $[a, b]$ de A .

ne dépend pas de x

i) Soit $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x, t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

ii) Soit $x \in [0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x, t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est CPM sur $[0, +\infty[$.

iii) Soit $[a, b] \subset [0, +\infty[$. ($0 \leq a < b$)

Soient $x \in [a, b]$ et $t \in [0, +\infty[$. On a :

$$|f(x, t)| = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$$

$$\leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

φ est CPM sur $[0, +\infty[$ et intégrable, car

$$\varphi(t) = \frac{1}{1+t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}, \text{ et que } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt < +\infty.$$

De i), ii) et iii) on tire que h est continue

sur $[0, +\infty[$.

Fin Exercice 6

Exercice 7

$$\text{Calculer } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-xt} dt \right).$$

Solution

Théorème (Intervention limite-intégrale)

Soit $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$; où I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Soit a une extrémité de J .

Si $\left\{ \begin{array}{l} 1) \forall x \in J, t \mapsto f(x, t) \text{ est CPM sur } I \\ 2) \forall t \in I, \lim_{x \rightarrow a} f(x, t) = l(t) \text{ avec } l \text{ est CPM sur } I \\ 3) \text{ Il existe } \varphi \text{ CPM et intégrable sur } I \text{ telle que : } (\forall (x, t) \in J \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)) \end{array} \right.$
(hypothèse de domination)

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow a} \left(\int_I f(x, t) dt \right) = \int_I \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x, t) \right) dt$$

Notons $f(x, t) = \ln(t) e^{-xt}$, pour tout $x \in \underbrace{[1, +\infty[}_{J}$ et $t \in \underbrace{]0, +\infty[_{I}}$.

$$\text{On veut calculer } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x, t) dt \right).$$

1) Soit $x \in [1, +\infty[$.

La fonction $t \mapsto f(x, t) = \ln(t) e^{-xt}$ est CPM sur $]0, +\infty[$.

2) Soit $t \in]0, +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(t) \cdot e^{-xt} = 0 = l(t)$$

l est CPM sur $]0, +\infty[$.

3) Soient $x \in [1, +\infty[$ et $t \in]0, +\infty[$.

$$|f(xt)| = |\ln t| \cdot e^{-xt}$$

$$x \geq 1 \Leftrightarrow -x \leq -1$$

$$\leq |\ln t| e^{-t} = \varphi(t).$$

φ est CPM sur $]0, +\infty[$.

φ est intégrable sur $]0, +\infty[$, en effet :

Montrons que $\int_0^{+\infty} |\ln t| e^{-t} dt$ converge.

$\int_0^1 |\ln t| e^{-t} dt$ converge, car :

$$|\ln t| e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} |\ln t|, \text{ et } \int_0^1 |\ln t| dt \text{ converge (C'est le Cours)}$$

$\int_1^{+\infty} |\ln t| e^{-t} dt$ converge, en effet :

$$|\ln t| e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right), \text{ car } \lim_{t \rightarrow +\infty} |\ln t| e^{-t} \cdot t^2 = 0$$

par croissance comparée au voisinage de $+\infty$.

$$\text{Or } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \text{ converge.}$$

$$\text{Alors } \int_1^{+\infty} |\ln t| e^{-t} dt \text{ converge.}$$

De 1), 2), 3) On tire que :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-x t} dt \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x, t) dt \right) \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, t) \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} 0 dt\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-x t} dt \right) = 0$$

Fin Exercise 7

Exercice 8

Considérons la fonction $g: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$.

On donne que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (dite intégrale de Gauss).

- 1) Montrer que g est définie sur $[0, +\infty[$.
- 2) Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$, et qu'elle est solution de l'équation différentielle $y' - y = \frac{-\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.

Solution

- 1) Montrer que g est définie sur $[0, +\infty[$.

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$$

Soit $x \in [0, +\infty[$.

Montrons que $g(x)$ est défini ; c'ad $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$ converge.

La fonction $t \mapsto \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est CPM sur $[0, +\infty[$.

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad 0 \leq \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$$

et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (Riemann)

D'ad $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$ converge, et donc $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$ converge



2) Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$, et qu'elle est solution de l'équation différentielle $y' - y = \frac{-\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.

2)iv) Montrons que g est dérivable sur $]0, +\infty[$.

On a : $g(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t) dt$, pour tout $x \in]0, +\infty[$.

Où : $f(x,t) = \frac{e^{-x+t^2}}{1+t^2}$, pour tout $x \in]0, +\infty[$ et $t \in]0, +\infty[$.

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x+t^2}}{1+t^2} dt$$

Rappel

Théorème 1 : (Classe C^1)

I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}; (x,t) \mapsto f(x,t)$.

Si $\left\{ \begin{array}{l} 1) \forall t \in I, x \mapsto f(x,t) \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } J \\ 2) \forall x \in J, t \mapsto f(x,t) \text{ est CPM et intégrable sur } I \\ 3) \forall x \in J, t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \text{ est CPM sur } I \\ 4) \text{ Il existe } \varphi \text{ CPM et intégrable sur } I \text{ telle que : } \left(\forall (x,t) \in J \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq \varphi(t) \right) \end{array} \right.$
(hypothèse de domination)

Alors $\left\{ \begin{array}{l} 1) g : x \mapsto \int_I f(x,t) dt \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } J \\ 2) \forall x \in J, g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) dt \text{ (dite formule de Leibniz)} \end{array} \right.$

NB :

Pour l'hypothèse de domination, il suffit de l'avoir sur tout segment inclus dans J . c-à-d :

Pour tout $[a,b] \subset J$. Il existe φ CPM et intégrable sur I telle que :

$$\left(\forall (x,t) \in [a,b] \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq \varphi(t) \right)$$

i) Soit $t \in]0, +\infty[$.

La fonction $x \mapsto f(x,t) = \frac{e^{-x+t^2}}{1+t^2}$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

ii) Soit $x \in]0, +\infty[$.

La fonction $t \mapsto f(x, t) = \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est CPM sur $[0, +\infty[$.

Elle est aussi intégrable sur $[0, +\infty[$; démonstration vue dans 1).

iii) Soit $x \in]0, +\infty[$.

La fonction $t \mapsto \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = \frac{-t^2}{1+t^2} e^{-xt^2}$ est CPM sur $[0, +\infty[$.

iv) Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$. (On a $0 < a < b$)

Soient $x \in [a, b]$ et $t \in [0, +\infty[$. On a :

$$\left| \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right| = \frac{t^2}{1+t^2} e^{-xt^2} \quad (0 < a \leq x \leq b \Rightarrow -x \leq -a)$$
$$\leq e^{-at^2} = \varphi(t)$$

φ est CPM sur $[0, +\infty[$.

φ est intégrable sur $[0, +\infty[$, car $\int_0^{+\infty} e^{-at^2} dt$ converge

Car $e^{-at^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (Riemann).

De i), ii), iii), iv) On tire que g est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

et qu'on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{-t}{1+t^2} e^{-xt^2} dt$$

□

2) ii) Montrons que g est solution de l'équation différentielle

$$y' - y = \frac{-\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \quad \text{sur }]0, +\infty[$$

Soit alors $x \in]0, +\infty[$. Montrons que $g'(x) - g(x) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.

$$g'(x) - g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t}{1+t^2} e^{-xt^2} dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{-(1+t^2)}{1+t^2} e^{-xt^2} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} -e^{-xt^2} dt$$

$$= -\int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{x}t)^2} dt$$

Considérons le changement de variable $u = \sqrt{x} \cdot t$

$$g'(x) - g(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-u^2} \times \frac{1}{\sqrt{x}} du$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Fin Exercice 8

Exercise 9

Considérons la fonction $g: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

1) Montrer que g est définie sur $]0, +\infty[$.

2) Montrer que g est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$, et qu'elle est solution de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$.

Solution

1) Montrons que g est définie sur $]0, +\infty[$.

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$$

Soit $x \in]0, +\infty[$.

Il s'agit de montrer que $g(x)$ existe, c'est-à-dire que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ converge.

La fonction $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est CPM sur $[0, +\infty[$.

$$\frac{e^{-xt}}{1+t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-xt}}{t^2}$$

Et $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^2} dt$ converge car $\frac{e^{-xt}}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{= o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (Riemann).

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ converge, et donc $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ converge. □

2) Montrer que g est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$, et qu'elle est solution de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$,

2) i) Montrer que g est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$$

On a : $g(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t) dt$, pour tout $x \in]0, +\infty[$.

Où : $f(x,t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$, pour tout $x \in \underbrace{]0, +\infty[}_J$ et $t \in \underbrace{[0, +\infty[}_I$.

Rappel

Théorème 2 : (Classe C^n)

I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}; (x,t) \mapsto f(x,t)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Si $\left\{ \begin{array}{l} 1) \forall t \in I, x \mapsto f(x,t) \text{ est de classe } C^n \text{ sur } J \\ 2) \forall x \in J, \forall 0 \leq i \leq n-1, t \mapsto \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t) \text{ est CPM et intégrable sur } I \\ 3) \forall x \in J, t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) \text{ est CPM sur } I \\ 4) \forall [a,b] \subset J, \text{ Il existe } \varphi \text{ CPM et intégrable sur } I \text{ telle que :} \\ \quad \left(\forall (x,t) \in [a,b] \times I, \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) \right| \leq \varphi(t) \right) \\ \text{(hypothèse de domination)} \end{array} \right.$

Alors $\left\{ \begin{array}{l} 1) g : x \mapsto \int_I f(x,t) dt \text{ est de classe } C^n \text{ sur } J \\ 2) \forall 1 \leq i \leq n, \forall x \in J, g^{(i)}(x) = \int_I \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t) dt \end{array} \right.$

i) Soit $t \in [0, +\infty[$.

La fonction $x \mapsto f(x, t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$. $\square$

ii) Soit $x \in]0, +\infty[$.

Soit $0 \leq i \leq 1$ (ici $n=2$).

$$\begin{aligned}\frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t) &= \frac{\partial^i}{\partial x^i} \left(\frac{e^{-xt}}{1+t^2} \right) \\ &= (-t)^i \cdot \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \\ &= (-1)^i t^i \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\end{aligned}$$

Ainsi la fonction $t \mapsto \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t) = (-1)^i t^i \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est

C^1 sur $[0, +\infty[$ (car continue).

Et elle est intégrable sur $[0, +\infty[$; en effet :

Il s'agit de montrer que $\int_0^{+\infty} t^i \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ converge.

$$\text{On a : } t^i \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^i \frac{e^{-xt}}{t^2} = t^{i-2} e^{-xt}$$

On a
 $x > 0$

Et $t^{i-2} e^{-xt} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (Riemann)

D'où $\int_0^{+\infty} t^2 \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ converge. $\square$

iii) Soit $x \in]0, +\infty[$.

La fonction $t \mapsto \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t) = t^2 \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est CPM sur $[0, +\infty[$

(Car continue). $\square$

iv) Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$. (On a ainsi: $0 < a < b$)

Soient $x \in [a, b]$ et $t \in [0, +\infty[$. On a :

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t) \right| = t^2 \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{On a } 0 < a \leq x < b \\ \Rightarrow -x \leq -a \end{array} \right)$$

$$\leq t^2 \frac{e^{-at}}{1+t^2} = \varphi(t). \quad (\varphi \text{ ne dépend pas de } x)$$

$\varphi: t \mapsto t^2 \frac{e^{-at}}{1+t^2}$ est CPM sur $[0, +\infty[$, et est aussi

intégrable : démonstration pareille à dans ii). $\square$

De i), ii), iii) et iv) on tire que la fonction

$$g: x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x, t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \text{ est de}$$

Classe C^2 sur $]0, +\infty[$.

Soit que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad g''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(xt) dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt.$$

□

2) ii) Montrons que g est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$,

g est déjà de classe C^2 sur $]0, +\infty[$.

Soit $x \in]0, +\infty[$.

Montrons que $g''(x) + g(x) = \frac{1}{x}$.

On a :

$$\begin{aligned} g''(x) + g(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} + \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \right) dt \end{aligned}$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$$

$$= \frac{1}{\lambda} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\lambda t} - 1 \right)$$



Fin Exercice 9

Exercice 10

Considérons la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx} dt$.

1) Montrer que F est bien définie sur $[0, +\infty[$.

2) Montrer que F est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$.

3) Calculer $F^{(n)}(0)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx} dt.$$

1) Montrer que F est bien définie sur $[0, +\infty[$.

Soit $x \in [0, +\infty[$.

Montrons que $F(x)$ est défini.

Càd que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx} dt$ converge.

La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{1+tx}$ est d'abord CPM sur $[0, +\infty[$.

et on a :

$$\forall t \in [0, +\infty[, 0 < \frac{e^{-t}}{1+t} < e^{-t}$$

et que $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge.

$$\text{D'où } \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t} dt \text{ converge.}$$

_____ $\square$

2) Montrer que F est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$.

On a : $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t) dt$, pour tout $x \in [0, +\infty[$, où :

$$f(x,t) = \frac{e^{-t}}{1+t} , \text{ pour tout } x \in [0, +\infty[, \text{ et } t \in [0, +\infty[.$$

Théorème 3 : (Classe C^∞)

I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : J \times I \longrightarrow \mathbb{K}; (x,t) \longmapsto f(x,t)$.

Si $\left\{ \begin{array}{l} 1) \forall t \in I, x \longmapsto f(x,t) \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } J \\ 2) \forall x \in J, t \longmapsto f(x,t) \text{ est CPM et intégrable sur } I \\ 3) \forall x \in J, \forall n \geq 1, t \longmapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) \text{ est CPM sur } I \\ 4) \forall [a,b] \subset J, \forall n \geq 1, \text{ Il existe } \varphi \text{ CPM et intégrable sur } I \text{ telle que :} \\ \left(\forall (x,t) \in [a,b] \times I, \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) \right| \leq \varphi(t) \right) \\ \text{(hypothèse de domination)} \end{array} \right.$

Alors $\left\{ \begin{array}{l} 1) g : x \longmapsto \int_I f(x,t) dt \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } J \\ 2) \forall n \geq 1, \forall x \in J, g^{(n)}(x) = \int_I \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) dt \end{array} \right.$

i) Soit $t \in [0, +\infty[$.

La fonction $x \mapsto f(x, t) = \frac{e^{-t}}{1+tx}$ est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$.

□

ii) Soit $x \in [0, +\infty[$.

La fonction $t \mapsto f(x, t) = \frac{e^{-t}}{1+tx}$ est CPM et intégrable sur

$[0, +\infty[$ (vu dans 10).

□

iii) Soit $x \in [0, +\infty[$.

Soit $n \geq 1$.

La fonction $t \mapsto \frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x, t)$ est CPM sur $[0, +\infty[$.

En effet :

On a d'abord :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x, t) &= \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{e^{-t}}{1+tx} \right) \\ &= e^{-t} \left((1+tx)^{-1} \right)^{(n)} \quad (\text{dérivée par rapport à } x) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x, t) = \frac{(-1)^n n! t^n}{(1+tx)^{n+1}} \cdot e^{-t}$$

La fonction $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) = \frac{(-1)^n n! t^n}{(1+tx)^{n+1}} \cdot e^{-t}$ est CPM sur $[0, +\infty[$.



iv) Soit $[a, b] \subset [0, +\infty[$.

Soit $n \geq 1$.

Soient $x \in [a, b]$ et $t \in [0, +\infty[$. On a :

$$\left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| = \frac{n! t^n e^{-t}}{(1+tx)^{n+1}}$$

$$\leq n! t^n e^{-t} = \varphi(t)$$

$\varphi : t \mapsto n! t^n e^{-t}$ est CPM et intégrable sur $[0, +\infty[$

car $\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ à fort croissant comparée, et que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \text{ converge.}$$



De i), ii), iii) et iv) on tire que la fonction

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x, t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx} dt \text{ est de}$$

Classe C^∞ sur $[0, +\infty[$.

Soit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, +\infty[, F^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^n}{\partial x^n} f(xt) dt = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n n! t^n e^{-t}}{(1+tx)^{n+1}} dt$$

3) Calculer $F^{(n)}(0)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} F^{(n)}(0) &= \int_0^{+\infty} (-1)^n n! t^n e^{-t} dt \\ &= (-1)^n n! \underbrace{\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt}_{=?} \end{aligned}$$

Notons $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{On a } I_{n+1} = \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} (-e^{-t})' t^{n+1} dt$$

$$= \underbrace{\left[-e^{-t} \cdot t^{n+1} \right]_0^{+\infty}}_{=0, \text{ par croissance comparée}} + \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot (n+1) t^n dt$$

$= 0$, par
croissance comparée

$$F^{(n)}(0) = (-1)^n n! I_n$$

$$= (n+1) \underbrace{\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt}_{= I_n}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 0, I_{n+1} = (n+1) I_n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_n = n I_{n-1} \\ \vdots \\ I_1 = 1 \cdot I_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, I_n = n! \cdot I_0$$

$$\text{On a } I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

$$\text{Donc } (\forall n \in \mathbb{N}, I_n = n!)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, F^{(n)}(0) = (-1)^n (n!)^2$$

$$F^{(n)}(0) = (-1)^n n! I_n$$

Fin Exercise 10

FIN