المملكة المغربية

CNC 2013

Mathématiques 2

Un corrigé par : **AQALMOUN MOHAMED** agrégé de mathématiques MPSI CPGE Khouribga

Premier exercice
Matrice de Gram et application

1. La base canonique étant orthonormale pour le produit scalaire canonique, donc $\langle u_i, u_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} m_{k,i}m_{k,j} = \sum_{k=1}^{n}({}^tM)_{i,k}M_{k,j} = ({}^tMM)_{i,j}$, où l'on a noté $A_{i,j}$ le terme d'indice (i,j) de la matrice A.
   Il vient que $G(u_1,\dots,u_n) = {}^tMM$.
2. G symétrique, immédiat.
   Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tXG(u_1,\dots,u_n)X = {}^t(MX)MX = \langle {}^t(MX), {}^t(MX)\rangle = \|{}^t(MX)\|_2^2 \geq 0$, de plus si la famille $(u_1,\dots,u_n)$ est libre ; alors ${}^tXG(u_1,\dots,u_n)X = 0$ si, et seulement si, $MX = 0$, et comme M est la matrice de la famille $(u_1,\dots,u_n)$ dans la base canonique,donc inversible ; ainsi $MX = 0$ si, et seulement si, $X = 0$, il vient alors, dans ce cas que la matrice $G(u_1,\dots,u_n)$ est définie positive.
3. (3.1) Pour $i \in \{1,\dots,n\}$, posons $u_i = \sum_{k=1}^{i} e_k$,pour tout couple (i,j) d'éléments de $\{1,\dots,n\}$ on a $\langle u_i,u_j\rangle = \min(i,j) = a_{i,j}$, autrement dit $A = G(u_1,\dots,u_n)$, donc A est symétrique positive, de plus la famille $(u_1,\dots,u_n)$ est libre, alors A est définie positive.
   R_n est la matrice de la famille $(u_1,\dots,u_n)$ dans la base canonique qui est triangulaire supérieure,
   $$R_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   (3.2) On trouve, $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 1$, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ et $x_4 = 1$.
   Notons X une solution du système linéaire, $A_4X = Y$ qui est équivaut à ${}^tR_4R_4X = Y$, si on pose $Z = R_4X$, alors ${}^tR_4Z = Y$, et daprès ce qui précède, on obtient $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Deuxième exercice
Résolution de l'équation $X^2 + 3X = A$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1. La matrice A est triangulaire, donc les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 4$ et $\lambda_3 = 0$, trois valeurs propres deux à deux distincts, donc A est diagonalisable.

2. $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,1,-4)$.

3. $\det(e_1, e_2, e_3) = -4$, donc (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ (*dimension* 3).

$$\Delta = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. P est la matrice de passage de la base canonique à la base (e_1, e_2, e_3),

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ et , } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

5. (5.1) $B^2 + 3B$ est la matrice de l'edomorphisme $v + 3v$ dans la base canonique, donc les deux endomorphisme $v + 3v$ et u ont même matrice dans la base canonique, donc ces deux endomorphisme sont égaux.

   (5.2) u est un polynôme en v, donc commute à v.
   Pour $k \in \{1, 2, 3\}$, on a $\ker(u - \lambda_k \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \operatorname{Vect}(e_k)$, puisque les endomorphisme u et v commutent, alors $u(v(e_k)) = v(u(e_k)) = \lambda_k v(e_k)$, ainsi $v(e_k) \in \ker(u - \lambda_k \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \operatorname{Vect}(e_k)$, il en résulte que $v(e_k)$ est colinéaire à e_k, autrement dit e_k est un vecteur propre de v, or (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, formé par des vecteurs propres de v, alors v est diagonalisable, et sa matrice relativement à cette base est diagonale.

   (5.3) On a $B = PVP^{-1}$,donc La relation $B^2 + 3B = A$ est équivalente à $V^2 + 3V = \Delta$.
   Et cette dernière relation est équivalente à $\alpha_1^2 + 3\alpha_1 = 10$, $\alpha_2^2 + 3\alpha_2 = 4$ et $\alpha_3^2 + 3\alpha_3 = 0$, après la résolution de ces équations, on obtient $\alpha_1 = -5$ ou 2, $\alpha_2 = -4$ ou 1, et $\alpha_3 = 0$ ou -3. ainsi les valeurs possibles de B sont les 8 matrices $P \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) P^{-1}$, où α_1, α_2 et α_3 pred les valeurs précédentes.

   (5.4) Le nombre de solutions de l'équation $X^2 + X = \Delta$ est égal à $2^3 = 8$.
   et comme l'application $V \mapsto PVP^{-1}$ et une bijection entre l'ensemble des solution de $X^2 + 3X = \Delta$ et l'ensemble des solutions de l'équation $X^2 + 3X = B$, donc il y'a 8 solutions.

Problème

Première partie
Résultats préliminaires

1. (1.1) Pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $\deg D(P) = \deg P' \le \deg P - 1 \le n - 1$, donc $D(P) \in \mathbb{C}_n[X]$, autrement dit $\mathbb{C}_n[X]$ est stable par D.

   (1.2) Pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $D_n^{n+1}(P) = P^{(n+1)} = 0$, d'où $D_n^{n+1} = 0$, il vient que D_n est nilpotent.

   (1.3) Soit α un nombre complexe non nul, on a $D^{n+1} = 0$, alors
   $\alpha^{n+1} I_n = (\alpha I_n)^{n+1} - (-D_n)^{n+1} = (\alpha I_n + D_n)(\sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k}(-1)^k D_n^k)$, donc $D_n + \alpha I_n$ est inversible et
   $(D_n + \alpha I_n)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k}(-1)^k D_n^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \alpha^{-k-1} D_n^k.$

(1.4) Soit α un complexe non nul, d'après ce qui précède, $D_n+\alpha I_n$ est un automorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$, et si R est polynôme de degré n, c'est-à-dire élément de $\mathbb{C}_n[X]$, alors il existe un unique polynôme $R_1 \in \mathbb{C}_[X]$ tel que $(D_n+\alpha I_n)(R_1) = R$, ou encore $R_1'+\alpha R_1 = R$, de plus on a $\deg P = \deg(R_1'+\alpha R_1) = \deg R_1$ (car si R_1 n'est pas constant, $\deg R_1' < \deg R_1$ sinon l'égalité est triviale).
Expression de R_1 ;
$R_1 = (D_n+\alpha I_n)^{-1}(R) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\alpha^{-k-1}D_n^k(R) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\alpha^{-k-1}R^{(k)}$, où $R^{(k)}$ désigne la k ième dérivée du polynôme R.

2. (2.1) Soit f une solution de l'équation différentielle $y'-\lambda y = g$, et pour $x\in\mathbb{R}$ posons $G(x) = f(x)e^{-\lambda x}$, G est une fonction dérivable, montrons que c'est une primitive de la fonction $x\mapsto g(x)e^{-\lambda x}$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a ; $G'(x) = f'(x)e^{-\lambda x}-\lambda f(x)e^{-\lambda x} = (f'(x)-\lambda f(x))e^{-\lambda x} = g(x)e^{-\lambda x}$.
Réciproquement, il est facile de vérifier, que toute fonction de la forme $x\mapsto G(x)e^{-\lambda x}$ où G est une primitive de la fonction $x\mapsto g(x)e^{-\lambda x}$, est une solution de l'équation différentielle en question.

(2.2) D'après la question précédente, les solution de l'équation différentielle $y'-\lambda y = g$, sont les fonction de la forme $x\mapsto S(x)e^{\lambda x}$, où S est une primitive de la fonction $x\mapsto g(x)e^{-\lambda x} = R(x)$, c'est-à-dire S est un polynôme dont le polynôme dérivé est égal à R.

(2.3) Notons R_1, l'unique polynôme tel que $R = R_1'+(\mu-\lambda)R_1$, d'après la première question, les solution de l'équation différentielle $y'-\lambda y = g$, sont de la forme $x\mapsto G(x)e^{\lambda x}$ où G est une primitive de la fonction $x\mapsto g(x)e^{-\lambda x} = R(x)e^{(\mu-\lambda)x}$, autrement dit $G'(x) = R_1'e^{(\mu-\lambda)x}+(\mu-\lambda)R_1e^{(\mu-\lambda)x} = \left(R_1(x)e^{(\mu-\lambda)x}\right)'$ "*dérivée d'une expression en x* ", ainsi G est de la forme $x\mapsto R_1(x)e^{(\mu-\lambda)x}+c$ où c est une constante, on en déduite alors que les solutions de l'équation différentielle en question sont les fonctions de la forme $x\mapsto R_1(x)e^{\mu x}+ce^{\lambda x}$ où c est une constante.

Deuxième partie
Expression des solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_P)$

1. Si f est solution de l'équation différentielle $\mathscr{E}_P$, alors $(\mathscr{D}-\lambda I)^n(f) = P(\mathscr{D})(f) = 0$.
Calcul de $h^{(n)}$; pour tout $x\in\mathbb{R}$, à l'aide de la formule de **Liebnitz**, on obtient

$$\begin{aligned} h^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k(-\lambda)^k e^{-\lambda x} f^{(n-k)}(x) \\ &= e^{-\lambda x}\sum_{k=0}^{n} C_n^k(-\lambda)^k\mathscr{D}^{n-k}(f)(x) \\ &= e^{-\lambda x}(\mathscr{D}-\lambda I)^n(f)(x) \\ &= e^{-\lambda x}P(\mathscr{D})(f)(x) = 0 \end{aligned}$$

Donc h est un polynôme de degré inférieure ou égal $n-1$, si on pose $R = h$, alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x) = R(x)e^{\lambda x}$.
Réciproquement, si f est de cette forme alors , $\forall x\in\mathbb{R}$, par un calcul analogue, au précédent, on a

$$P(\mathscr{D})(f)(x) = e^{\lambda x}R^{(n)}(x) = 0$$

Il vient alors que f, est solution de $\mathscr{E}_P$.

2. (2.1) Les deux endomorphismes $Q(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}-\lambda I)$ sont dans $\mathbb{C}[\mathscr{D}]$ l'algèbre des endomorphismes polynôme en $\mathscr{D}$ qui est commutative, donc commutent.

   (2.2) f solution de l'équation différentielle $\mathscr{E}_P$ si, et seulement si, $P(\mathscr{D})(f)=0$ si, et seulement si, $(\mathscr{D}-\lambda I)Q(\mathscr{D})(f)=0$ si, et seulement si, (la commutativité) $Q(\mathscr{D})(\mathscr{D}-\lambda I)(f)=0$ si, et seulement si, $Q(\mathscr{D})(f'-\lambda f)=0$ si, et seulement si, $f'-\lambda f$ est solution de l'équation différentielle $\mathscr{E}_Q$.

3. Pour $n=1$, il s'agit de l'équation différentielle de la question 1.3.1 avec $g=0$, les solution sont de la forme $x\mapsto G(x)e^{\lambda x}$, où G est une primitive de la fonction $x\mapsto g(x)e^{-\lambda x}=0$, c'est-à-dire G est un polynôme de degré ≤ 0.
   Supposons que la propriété est vérifiée à l'ordre n.
   Posons $P=(X-\lambda)^{n+1}$, et $Q=(X-\lambda)^n$, de sorte que $P=(X-\lambda)Q$.
   f est solution de l'équation différentielle $\mathscr{E}_P$ si, et seulement si, $f'-\lambda f$ est solution de l'équation différentielle $\mathscr{E}_P$. D'après l'hypothèse de récurrence, la fonction $f'-\lambda f$ est de la forme $x\mapsto R(x)e^{\lambda x}$ où R est un polynôme dans $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, remarquons maintenant que f est solution de l'équation différentielle $y'-\lambda y=R(x)e^{\lambda x}$, et d'après la question 1.3.2, f est de la forme $x\mapsto S(x)e^{\lambda x}$, avec $S'=R$, et donc $S\in\mathbb{C}_n[X]$.

4. **Un exemple :** $P_1=(X-1)(X+1)^3$;
   f est solution de $\mathscr{E}_{P_1}$ si, et seulement si, $f'-f$ est solution de $\mathscr{E}_{(X+1)^3}$, dont les solution sont de la forme $x\mapsto R(x)e^{-x}$ où R est un polynôme de degré ≤ 2, donc f est de cette forme, ainsi f est solution de l'équation différentielle $y'-y=R(x)e^{-x}$, d'après 1.3.3, f est de la forme $x\mapsto R_1(x)e^{-x}+ce^{x}$, avec R_1 un polynôme de degré ≤ 2 et $c\in\mathbb{C}$.

5. Par récurrence sur $\deg P\geq 2$.
   Pour $n=2$.
   Dans ce cas le polynôme P est de la forme, $P=(X-\lambda)(X-\mu)$, on va distinguer les deux cas suivant :
   • 1er cas : si $\lambda=\mu$, déjà traiter dans les question précédentes.
   • 2ieme cas : $\lambda\neq\mu$, et f solution de l'équation différentielle $\mathscr{E}_P$, d'après la le résultat de la question 2.2.2, $f'-\lambda f$ est solution de l'équation différentielle $\mathscr{E}_{X-\mu}$ dont les solution sont de la forme $x\mapsto\gamma e^{\mu x}$, avec $\gamma\in\mathbb{C}$, ainsi f est solution de l'équation différentielle $y'-\lambda y=\gamma e^{\mu x}$, et d'après le résultat de la question 1.3.3 ($\lambda\neq\mu$), f est de la forme $x\mapsto\alpha e^{\mu x}+ce^{\lambda x}$, où $\alpha,c\in\mathbb{C}$.
   Supposons que la propriété est vérifiée pour tout polynôme scindé de degré $\leq n$.
   Soit P un polynôme scindé de degré $n+1$, on peut alors écrire le polynôme P sous la forme $P=(X-\lambda)\displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)^{m_k}$, où $r\geq 1$, $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ sont des complexes deux à deux distincts, $m_1,\dots,m_r$ des entiers naturels non nuls, et λ un complexe qui **n'est pas nécessairement distinct** des λ_k. Soit $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$, d'après ce qui précède f est solution de l'équation différentielle $\mathscr{E}_P$ si, et seulement si, $f'-\lambda f$ est solution de l'équation différentielle $\mathscr{E}_Q$ où Q est le polynôme $\displaystyle\prod_{k=0}^{r}(X-\lambda_k)^{m_k}$, d'après l'hypothèse de récurrence, la fonction $f'-\lambda f$ est de la forme $x\mapsto\displaystyle\sum_{k=1}^{r}R_k(x)e^{\lambda_k x}$, où , pour chaque $k\in\{1,\dots,r\}$, $R_k\in\mathbb{C}_{m_k-1}[X]$, remarquons maintenant que f est solution de l'équation différentielle ; (E) $y'-\lambda y=\displaystyle\sum_{k=1}^{r}R_k(x)e^{\lambda_k x}$, à laquelle on va s'intéresser pour trouver une expression de f. La

solution générale de l'équation différentielle homogène associée à E est de la forme $x \mapsto \gamma e^{\lambda x}$, où γ est un complexe, une solution particulière de l'équation différentielle (E) peut être obtenue par la superposition des solutions particulières des équations différentielles (E_k) $y' - \lambda y = R_k e^{\lambda_k x}$, pour $k = 0, \dots, r$, deux cas se presentes :

• 1er cas : λ est distinct de tous les λ_k , $k = 0, \dots, r$;

D'après le résultat de la question 1.3.3, chacune des équations différentielle E_k, possède une solution particulière de la forme $x \mapsto R_{k,1}(x)e^{\lambda_k x}$ où, pour chaque $k \in \{1, \dots, r\}$, $R_{k,1}$ est un polynôme de degré $\leq m_k - 1$ (en effet $\deg R_{k,1} = \deg R_k \leq m_k - 1$), en on déduit alors que la fonction $x \mapsto \sum_{k=1}^{r} R_{k,1}(x)e^{\lambda_k x}$ est une solution particulière de E, ainsi f est de la forme $x \mapsto \gamma e^{\lambda x} + \sum_{k=1}^{r} R_{k,1}(x)e^{\lambda_k x}$, notons que l'ordre de multiplicité de λ est égal à 1, ce qui démontre le résultat dans ce cas.

• 2ieme cas : λ est l'un des complexes λ_k où $k \in \{1, \dots, r\}$;

Pour simplifier on peut supposer que $\lambda = \lambda_r$, donc l'ordre de multiplicité de la racines λ_r dans le polynôme P est $m_k + 1$, toujours par le résultat de la question 1.3.2, pour $k \in \{1, \dots, r-1\}$, la fonction $x \mapsto R_{k,1}e^{\lambda_k x}$ où $\deg R_{k,1} \leq m_k - 1$ est une solution particulière de E_k, pour la détermination d'une solution particulière de l'équation (E_r), remarquons, pour cette équation différentielle, que $\lambda = \lambda_r$, d'après le résultat de la question 1.3.2, une solution particulière de cette équation différentielle est de la forme $x \mapsto S(x)e^{\lambda_r x}$ avec $S' = R_r$, ainsi S est un polynôme de degré $\leq m_r = (m_r + 1) - 1$, il en résulte que f est de la forme $x \mapsto \gamma e^{\lambda x} + S(x)e^{\lambda_r x} + \sum_{k=1}^{r-1} R_{k,1}(x)e^{\lambda_k x} = (\gamma + S(x))e^{\lambda_r x} + \sum_{k=1}^{r-1} R_{k,1}(x)e^{\lambda_k x}$, qui a la forme voulu.

6. Quitte à divser le polynome par sont coefficient dominant, (pas d'influence sur l'ensemble des solutions), on peut supposer que P est **unitaire**.

> La seule hypothèse qui manque pour démontrer ce résultat, et c'est que le polynôme soit **scindé** (*c'était une hypothèse dans la question précédente*). Donc il s'agit bien du théorème de **D'alembert-Gauss**, puisqu'on cherche des solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$, ce qui n'est pas le cas lorsqu'on cherche des solution à valeurs dans $\mathbb{R}$

Remarquons que le sous espace vectoriel des solutions de $\mathscr{E}_P$ est somme direct des sous espaces vectoriels $F_k = \{x \mapsto P(x)e^{\lambda_k},\ P \in \mathbb{C}_{m_k-}[X]\}$, où $k = 0, \dots, r$, chacun est de dimension m_k, ainsi la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des solutions de $\mathscr{E}_P$ est égale à $\sum_{k=1}^{r} m_k = \deg P$.

7. **Un autre exemple :** $P_2 = (X-1)^3(X-i)^2(X+i)^2$, d'après le résultat de la question précédent, les solutions de $\mathscr{E}_{P_2}$, sont de la forme

$$x \mapsto R_1(x)e^x + R_2(x)e^{ix} + R_3 e^{-ix}$$

où R_2, R_3 sont des polynômes de degré ≤ 1, et R_1 polynôme de degré ≤ 2.

Troisième partie
Un résultat de finitude

1. (1.1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$; $g_n(x) = nf_{\frac{1}{2}}(x) - nf_0(x)$, donc $g_n = nf_{\frac{1}{n}} - nf_0$, c'est bien un élément de E_f.
$(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est une base de E_f, puisque g_n est un élément de E_f, il existe alors des complexes $\alpha_{1,n}, \dots, \alpha_{p,n}$ tels que $g_n = \sum_{k=1}^{p} \alpha_{k,n}\varphi_k$.

   (1.2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n(x) = \dfrac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{1/n}$, puisque f est dérivable, donc $\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = f'(x)$, c'est bien maintenant que la suite de fonction converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f'.

2. (2.1) Supposons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\delta_2(a_1, x) = 0$, par l'expression du déterminant on aura, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_1(a_1)\varphi_2(x) - \varphi_2(a_1)\varphi_1(x) = 0$, ce qui est impossible, puisque $\varphi_1(a_1) \neq 0$ et la famille (φ_1, φ_2) est libre. Donc la fonction $x \mapsto \delta_2(a_1, x)$ n'est pas identiquement nulle, ce qui prouve l'existence d'un réel $a_2 \in \mathbb{R}$, tel que $\delta_2(a_1, a_2) \neq 0$, ainsi la matrice $\Delta_2(a_1, a_2)$ est inversible.

   (2.2) Supposons par l'absurde que la fonction $x \mapsto \delta_{k+1}(a_1, \dots, a_k, x)$ est nulle, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\delta_{k+1}(a_1, \dots, a_k, x) = 0$, on développe par rapport à la dernière ligne, on obtient une relation de la forme $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{k+1} c_i\varphi_i(x) = 0$, où $c_1, \dots, c_{k+1}$ sont des constantes complexes, et remarquons que $c_{k+1} = \delta_k(a_1, \dots, a_k)$ qui est non nul par hypothèse de récurrence, cette dernière relation s'écrie aussi $\sum_{i=1}^{k+1} c_i\varphi_i = 0$, qui est une contradiction avec le fait que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_{k+1})$ est libre et $c_{k+1} \neq 0$, on en déduit alors qu'il existe un réel a_{k+1} tel que $\delta_{k+1}(a_1, \dots, a_k, a_{k+1})$ est non nulle, ou encore tel que la matrice $\Delta_{k+1}(a_1, \dots, a_k, a_{k+1})$ est inversible.
On a démontrer la propriété par récurrence.

3. (3.1) Pour $i \in \{1, \dots, p\}$, la i-ième composante de la matrice colonne MY_n est $\sum_{k=0}^{p} \varphi_k(a_i)\alpha_{k,p} = g_n(a_i)$ qui est aussi la i-ième composante de la matrice colonne Z_n, d'où $MY_n = Z_n$.

   (3.2) Par le résultat de la question précédente, et le fait que M est inversible, on a $Y_n = M^{-1}Z_n$, et comme la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ est convergente de limite, le vecteur Z de composante $f'(a_1), \dots, f'(a_p)$, aussi tenant compte la continuité de l'application $H \mapsto M^{-1}H$, de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$, alors la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ est convergente, et on a $Y = M^{-1}Z$.

   (3.3) De la question précédente, on déduit que pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, la suit $(\alpha_{k,n})_{n\geq 1}$ est convergente de limite α_k, maintenant pour $x \in \mathbb{R}$, passant à la limite dans la relation (1), il vient que $f'(x) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k\varphi_k(x)$, ce qui monter que $f' \in E_f$.

4. Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, la fonction f_τ est dérivable, par la suite tout élément de E_f et dérivable, remarquons aussi que si $h \in E_f$, alors $E_h \subset E_f$, comme tout élément de E_f est dérivable, h est dérivable et avce un même raisonnement $h' \in E_h \subset E_f$, il vient alors que $h' \in E_f$.
Soit $g \in E_f$, montrons par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$,que g est q fois dérivable et que $g^{(q)} \in E_f$: $g \in E_f$, d'après ce qui précède, g est aussi dérivable et $g \in E_f$, supposons que g est q fois dérivable et que $g^{(q)} \in E_f$, par le résultat de la question précédente, $g^{(q)}$ est dérivable et $(g^{(q)})' \in E_f$, c'est-à-dire g est $q+1$ fois dérivable et $g^{q+1} \in E_f$.D'où le résultat.

5. P étant le polynôme caractéristique de $\mathcal{D}$, par le théorème de **Cayley-Hamilton**, on a $P(D) = 0$, en particulier $P(D)(f) = 0$, donc f est solution de l'équation différentielle $\mathscr{E}_P$. Quitte à diviser par le coefficient dominant de P, on peut suppose que P est unitaire (cette n'a pas d'influence sur l'ensemble des solutions de l'équation différentielle). Par le théorème de **D'Alembert-Gauss**, le polynôme P s'écrit sous la forme $P = \prod_{k=1}^{r}(X - \lambda_k)^{m_k}$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont des complexes deux à deux distincts,et $m_1, \ldots, m_r$ des entiers naturels (*c'est l'hypothèse qui manque pour appliquer le résultat de la question* 2.5 *de la deuxième partie*), maintenant c'est bien que f est de la forme

$$x \mapsto \sum_{k=1}^{r} R_k(x)e^{\lambda_k x}$$

où les $R_k \in \mathbb{C}_{m_k-1}[X]$.
Réciproquement, si f est de la forme

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{r} R_k(x)e^{\lambda_k x}$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ des complexes deux à deux distincts, et les R_k des polynômes, notons $\deg(R_k) = m_k$ pour $k \in \{1, \ldots, r\}$, alors

$$E_f \subset E = \{x \mapsto \sum_{k=1}^{r} Q_k(x)e^{\lambda_k x}\ ,\ \text{ pour } k = 0, \ldots, r\ Q_k \in \mathbb{C}_{m_k}[X], \}$$

En effet ; pout $\tau \in \mathbb{R}$, $f_\tau(x) = \sum_{k=0}^{r} Q(x+\tau)e^{\lambda\tau+\lambda x}$. Or pour tout $k = 0, \ldots, r$, on a $Q(x + \tau)e^{\lambda_k\tau+\lambda_k x} = (e^{\lambda\tau}Q(x+\tau))e^{\lambda_k x}$, et $e^{\lambda_k}Q(X+\tau)$ est un polynôme de degré $\leq m_k$, alors ($E_f \subset E$).
Comme E est un sous espace vectoriel de dimension finie (de dimension $m_1 + \ldots + m_k$), alors E_f est aussi de dimension finie.
Conclusion :
Une condition nécessaire et suffisante pour la finitude de la dimension de E_f, est que la fonction f doit être de la forme $x \mapsto \sum_{k=0}^{r} R_k(x)e^{\lambda_k x}$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ des complexes (*non forcément deux à deux distincts*), et les R_k des polynômes à coefficients complexes.

النهـــاية **FIN END**