

Problème : (Noyaux et images itérés, problème détaillé)

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Soit u un endomorphisme de E .

Pour tout entier naturel p , on notera $I_p = \text{Im}(u^p)$ et $K_p = \text{ker}(u^p)$.

- 1) Énoncer le théorème du rang.
- 2) Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \subset G$.
Compléter : $\dim(F) = \dim(G) \Leftrightarrow \dots$

- 3) Soit $p \in \mathbb{N}$, montrer que :

A) $K_p \subset K_{p+1}$.

B) $I_{p+1} \subset I_p$

Indication : $u^{p+1} = u^p \circ u = u \circ u^p$.

- C) Que dire de K_p et K_{p+n} d'une part, et de I_p et I_{p+n} d'autre part.

(sans justification)

- 4) On suppose que E est de dimension finie et u injectif.

- A) u^p est-il surjectif ? injectif ?

- B) Expliciter alors K_p et I_p .

- 5) On suppose que E est de dimension finie n non nulle, et que u est non injectif.

- a) Montrer, en introduisant les dimensions, qu'il est impossible d'avoir :

$$\forall p \in \mathbb{N}, K_p \subset K_{p+1} \text{ et } K_p \neq K_{p+1}$$

Il existe alors un entier p tel que $K_p = K_{p+1}$. Notons r le plus petit de ces entiers. Notons encore $n_p = \dim(K_p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

- b) Combien vaut n_0 ? (on rappelle la convention $u^0 = I_E$)

- c) Comparer pour tout $p \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$, n_p avec n_{p+1} . ($<$ ou $>$?)

- d) Si $m, n \in \mathbb{N}$, compléter : $m < n \Leftrightarrow m + \dots \leq n$

- e) En déduire de ce qui précède que $r \leq n$.

- f) Rappelons que $K_r = K_{r+1}$. Montrer que $I_r = I_{r+1}$.

(vous pouvez utiliser 1) et 2))

- g) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}, K_r = K_{r+p}$.

Indication : Récurrence sur p , puis $u^{r+p+1} = u^{r+1} \circ u^p$ et enfin $K_r = K_{r+1}$.

Alors soyez précis !

- h) En déduire que $\forall p \in \mathbb{N}, I_r = I_{r+p}$.

- i) Montrer que $K_r \cap I_r = \{0\}$.

- j) En déduire que $E = K_r \oplus I_r$.