Probabilités (Partie 2)

Résumé Lacunaire

Dans toute cette partie, (Ω, T, P) est un espace probabilisé.

I) Variable aléatoire réelle (var)

1) Généralités

Prop

X var si et ssi l'image réciproque de tout intervalle de $\mathbb{R}$ est un élément de [redacted]

Autres notations

Soient X une var et $x \in \mathbb{R}$.

→ $X^{-1}(]-\infty, x])$ se note $(X$ [redacted] $x)$

→ $X^{-1}(]-\infty, x[)$ se note $(X$ [redacted] $x)$

→ $X^{-1}([x, +\infty[)$ se note $(X$ [redacted] $x)$

→ $X^{-1}(]x, +\infty[)$ se note $(X$ [redacted] $x)$

→ $X^{-1}(]a, b])$ se note $(a$ [redacted] X [redacted] $b)$

→ $X^{-1}([a,b[)$ se note $(a$ [redacted] X [redacted] $b)$

→ $X^{-1}(]a,b[)$ se note $(a$ [redacted] X [redacted] $b)$

→ $X^{-1}([a,b])$ se note $(a$ [redacted] X [redacted] $b)$

→ $X^{-1}(\{a\})$ se note $(X$ [redacted] $a)$

→ $\overline{(X=a)}$ se note $(X$ [redacted] $a)$

→ $X^{-1}(I)$ se note $(X$ [redacted] $I)$

où I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Notation

1) X une var.

I et J deux intervalles.

$(X\in I)$ [redacted] $(X\in J)$ se notera $(X\in I\,,\, X\in J)$

2) $X_1, \dots, X_n$ des var.

$I_1, \dots, I_n$ des intervalles.

$(X_1\in I_1)$ [redacted] $\dots$ [redacted] $(X_n\in I_n)$ se notera $(X_1\in I_1, \dots, X_n\in I_n)$

Prop

X var. On a :

1) i) $(X\in A\underset{et}{\cap}B) = (X\in A)$ [redacted] $(X\in B)$ (càd $(X\in A$ [redacted] $X\in B)$)

ii) $\left(X\in \bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) =$ [redacted] $_{i=1}^{n}(X\in A_i)$ (càd $(X\in A_1$ [redacted] $\dots$ [redacted] $X\in A_n)$)

iii) $\left(X\in \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i\right) =$ [redacted] $_{i=1}^{+\infty}(X\in A_i)$

2) i) $(X\in A\underset{ou}{\sqcup}B) = (X\in A)$ [redacted] $(X\in B)$

ii) $\left(X\in \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) =$ [redacted] $_{i=1}^{n}(X\in A_i)$

iii) $\left(X\in \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) =$ [redacted] $_{i=1}^{+\infty}(X\in A_i)$

3) $\overline{(X\in A)} = (X\in$ [redacted] $)$

4) $\overline{(X\leq a)} = (X$ [redacted] $a)$

5) i) $P(X>a) = 1 - P(X$ [redacted] $a)$

ii) $P(X\neq a) = 1 - P(X$ [redacted] $a)$

6) i) $(X\leq a)$ [redacted] $(X\leq a+1)$

ii) $(X<a)$ [redacted] $(X\leq a)$

iii) $\big((X\leq n)\big)_n$ est une suite [redacted] d'événements.

iv) $(X<a+1)\setminus(X<a) = (a$ [redacted] X [redacted] $a+1)$

⚠ v) $P(a\leq X<a+1) = P(X$ [redacted] $a+1) - P(X$ [redacted] $a)$

Prop

X var.

1) Supposons que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, où les x_i distincts deux à deux.

On a :

a) $\left([redacted]\right)_{1 \leq i \leq n}$ est un système complet d'événements.

b) $\sum_{i=1}^{n} P([redacted]) = 1$ [redacted]

2) Supposons que $X(\Omega) = \{x_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$, où les x_n distincts deux à deux.

On a :

a) $\left([redacted]\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

[redacted]

b) $\sum_{n=0} P([redacted]) = 1$ [redacted]

c) La série $\sum_{n \geq 0} P([redacted])$ est une SATP [redacted].

Vocabulaire

Si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable, on dit que X est une variable aléatoire [redacted].

2) Loi d'une variable aléatoire

(Ω, T, P) espace probabilisé.

Déf

Soit X une var sur Ω.

La loi de X est l'application P_X qui associe à chaque intervalle I de $\mathbb{R}$ le réel $P_X(I)$ défini par :

$$P_X(I) = P([redacted])$$ [redacted]

Remarque pratique

Quand on demande de déterminer la loi d'une vard X, en réponse, on donne :

1) $D = X(\Omega)$; l'ensemble des valeurs prises par X.

2) Pour tout $a \in D$, on donne la valeur de $P($[redacted]$)$.

3) Lois usuelles

a) Loi uniforme

Déf

Soit E un ensemble fini de Cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
On dit que X suit une loi uniforme sur E si et ssi :

1) $X(\Omega) = E$

2) $\forall a \in E,\ P(X = a) =$ [redacted]

$X \sim \mathcal{U}(n) \iff$
1) $X(\Omega) =$ [redacted]
2) $\forall$ [redacted] $P(X = k) =$ [redacted]

b) Loi de Bernoulli

Déf

Soit $0 < p < 1$.
On dit que la var X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si et ssi :

1) $X(\Omega) =$ [redacted]

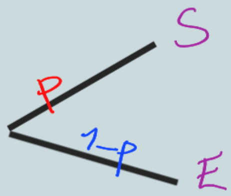
2) $P(X = 1) =$ [redacted] et $P(X = 0) =$ [redacted]

Notation On note $X \sim B(p)$

On pense à une loi de Bernoulli quand on a une expérience aléatoire à deux issues : Succès ou Echec.

La probabilité d'avoir Succès est p.

La probabilité d'avoir Echec est $(1-p)$.



La var X définie par : $\begin{cases} X=1 & \text{si on obtient } \end{cases}$ [redacted]

 $X=0$ si on obtient [redacted]

Soit une loi de Bernoulli de paramètre p : $X \sim B(p)$

à retenir

c) Loi binomiale

Déf

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 < p < 1$.

On dit que la var X suit une loi binomiale de paramètres n et p si et ssi :

1) $X(\Omega) =$ [redacted]

2) $\forall\, 0 \leq k \leq n,\ P(X=k) =$ [redacted]

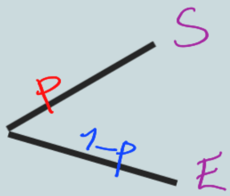
Notation On note $X \sim B(n,p)$

à retenir

On pense à une loi binomiale quand on a une expérience aléatoire à deux issues : Succès ou Echec.

La probabilité d'avoir Succès est p.

La probabilité d'avoir Echec est $(1-p)$.



On répète cette expérience [redacted] fois.

La var X égale au nombre de [redacted] obtenus suit une loi binomiale de paramètres n et p : $X \sim B(n,p)$

d) Loi géométrique

Déf

Soit $0 < p < 1$.

On dit que la var X suit une loi géométrique de paramètre p si et ssi :

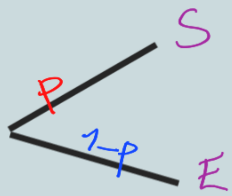
1) $X(\Omega) =$ [redacted]

2) $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X=k) =$ [redacted]

Notation On note $X \sim G(p)$

à retenir

On pense à une **loi géometrique** quand on a une expérience aléatoire à deux issus : Succès ou Echec.



La probabilité d'avoir Succès est p.

La probabilité d'avoir Echec est $(1-p)$.

On répète cette expérience jusqu'à l'obtention du 1^{er} succès.

La var X égale au [redacted] suit une loi géometrique de paramètre p : $X \sim G(p)$.

e) Loi de Poisson

Déf

Soit $\lambda > 0$.

On dit que la var X suit une loi de Poisson de paramètre λ si et ssi :

1) $X(\Omega) =$ [redacted]

2) $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) =$ [redacted]

Notation On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

4) Variable aléatoire composée (ou Image d'une var)

Notation

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une var sur l'espace probabilisé (Ω, T, P).

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

La composée $f \circ X$ se note souvent en probabilités [redacted]

Prop (admise)

Soient $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une var et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

Si f est [redacted] (resp. [redacted]) alors $f(X)$ est une var.

II) Couple de variables aléatoires réelles

1) Loi conjointe — Lois marginales

Déf

Soient X et Y deux var.

La loi du couple (X,Y) est l'application $P_{X,Y}$ qui associe à chaque $I \times J$ le réel $P_{X,Y}(I \times J)$ défini par : [redacted]

$$P_{X,Y}(I \times J) = P([redacted] \cap [redacted]) = P([redacted], [redacted])$$

où I et J des intervalles de $\mathbb{R}$.

NB : La loi du couple (X,Y) s'appelle aussi la loi conjointe de (X,Y).

Prop

⚠ Si X et Y deux var discrètes alors la loi du couple (X,Y) se détermine par la donnée des $P([redacted], [redacted])$ pour tout $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$.

Déf

Les lois marginales du couple (X,Y) sont la loi de [redacted] et celle de [redacted]

Prop

Soient X et Y deux var discrètes.

Si on connait la loi conjointe de (X,Y) alors on connaitra [redacted]

Soient X et Y deux var discrètes.

Notons $\mathcal{D} = X(\Omega)$ et $\mathcal{D}' = Y(\Omega)$.

1) $([redacted])_{x \in \mathcal{D}}$ et $([redacted])_{y \in \mathcal{D}'}$ sont deux SCE.

2) $\forall x \in \mathcal{D}, \quad P(X=x) = \sum_{y \in \mathcal{D}'} P(X=x, [redacted])$

3) $\forall y \in \mathcal{D}', \quad P(Y=y) = \sum_{x \in \mathcal{D}} P([redacted], Y=y)$

à retenir

2) Extension

Déf

Soient $X_1, \dots, X_n$ des var sur l'espace probabilisé (Ω, T, P).

La loi conjointe de $(X_1, \dots, X_n)$ est l'application $P_{X_1, \dots, X_n}$ qui associe à $I_1 \times \dots \times I_n$ le réel :

$$P_{X_1, \dots, X_n}(I_1 \times \dots \times I_n) = P([redacted], \dots, [redacted])$$

où $I_1, \dots, I_n$ des intervalles de $\mathbb{R}$.

Déf

Soient $X_1, \dots, X_n$ des var sur l'espace probabilisé (Ω, T, P).

Les lois marginales de $(X_1, \dots, X_n)$ sont les lois de [redacted]

Prop

Soient $X_1, \dots, X_n$ des var discrètes sur l'espace probabilisé (Ω, T, P).

1) La loi conjointe de $(X_1, \dots, X_n)$ se détermine par la donnée des $P($[redacted]$, \dots,$ [redacted]$)$, pour tout $x_1 \in D_1, \dots, x_n \in D_n$; où : $D_1 = X_1(\Omega), \dots, D_n = X_n(\Omega)$.

2) Si on connait la loi conjointe de $(X_1, \dots, X_n)$, on connaitra ses [redacted]

3) Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$

Déf

Soient X et Y deux var discrètes sur (Ω, T, P).

Notons $D = X(\Omega)$ et $D' = Y(\Omega)$.

Soit $x \in D$ tel que $P(X = x) \neq 0$.

La loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ est l'application :

$$I \longmapsto P(\text{[redacted]} \mid X = x)$$

où I intervalle de $\mathbb{R}$.

Prop

Soient X et Y deux var discrètes sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

Notons $D = X(\Omega)$ et $D' = Y(\Omega)$.

Soit $x \in D$ tel que $P(X=x) \neq 0$.

La loi conditionnelle de Y sachant $(X=x)$ est déterminée par la connaissance des P([redacted] | $X=x$), pour tout $y \in D'$.

Prop

Soient X et Y deux var discrètes sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

Notons $D = X(\Omega)$ et $D' = Y(\Omega)$.

Si on connaît { la loi de X et la loi de Y [redacted]

Alors on connaîtra la loi conjointe du couple (X, Y).

4) Indépendance de var

Déf

Soient X et Y deux var.

X et Y sont dites indépendantes si et ssi :

Pour tous intervalles I et J, P([redacted]) ∩ ([redacted])) = P([redacted]) . P([redacted])

Prop

Soient X et Y deux var discrètes.

Notons $X(\Omega)=D$ et $Y(\Omega)=D'$. On a :

$\left(\begin{array}{c} X \text{ et } Y \text{ sont dites} \\ \text{indépendantes} \end{array}\right) \iff \big(\forall (x,y) \in D\times D',\ P($[redacted]$) = P($[redacted]$)\cdot P($[redacted]$)\big)$

Prop

Supposons que X et Y sont indépendantes, alors :

Si on connait les lois marginale du couple de var (X,Y)

Alors on connait [redacted]

Déf

Soient $X_1, \dots, X_n$ des var.

On dit que $X_1, \dots, X_n$ sont deux à deux indépendantes si et ssi :

$\forall i$ [redacted] j, X_i et X_j sont indépendantes

Déf (Indépendance ou indépendance mutuelle)

Soient $X_1, \dots, X_n$ des var.

On dit que $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si et ssi pour tous intervalles $I_1, \dots, I_n$, les événements ([redacted]), ..., ([redacted]) sont indépendants.

Prop

Soient $X_1, \dots, X_n$ des var.

[redacted] ($X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes)

[redacted] ($X_1, \dots, X_n$ sont deux à deux indépendantes)

Prop

Soient $X_1, \dots, X_n$ des var.

Si ($X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes)

Alors $\left(\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, P(X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n) = \right.$ [redacted]

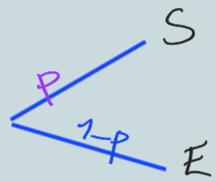
En général, on a :

Déf (Indépendance ou indépendance mutuelle) (Cas général)

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de var sur (Ω, T, P).

$(X_i)_{i \in I}$ est dite **mutuellement indépendante** si et ssi pour toute famille $(J_i)_{i \in I}$ d'intervalles, la famille d'événements ([redacted]$)_{i \in I}$ est mutuellement indépendante.

On dispose d'une expérience aléatoire à deux issues : Succès ou Echec.



La probabilité d'avoir Succès est p.

On répète cette expérience n fois.

Pour chaque $1 \leq i \leq n$:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si on a Succès à la } i^{\text{ème}} \text{ répétition} \\ 0 & \text{si on a Echec à la } i^{\text{ème}} \text{ répétition} \end{cases}$$

1) Il est usuel de considérer que $X_1, \dots, X_n$ sont des var [redacted], suivant toutes une loi de [redacted] de paramètre [redacted]

2) Notons $S = X_1 + \dots + X_n$. On a :

$S \sim$ [redacted]

Prop

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des var indépendantes, suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p.

Alors la somme $S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim$ [redacted]

5) Indépendance héritée

Prop (indépendance héritée)

Soient X et Y deux var et $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Si $\begin{cases} X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ f \text{ et } g \text{ continues ou monotones} \end{cases}$

Alors les var $f(X)$ et $g(Y)$ [redacted]

III) Espérance d'une var

1) Définition

Déf

Soit X une var discrète.

Notons $D = X(\Omega)$.

1) Si $D = \{x_1, \dots, x_n\}$, où les x_k sont distincts deux à deux,

L'espérance de X est :

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=1}^{n} \text{[redacted]} = \text{[redacted]} + \dots + \text{[redacted]}}$$

2) Si $D = \{x_k \,/\, k \in \mathbb{N}^*\}$, où les x_k sont distincts deux à deux,

i) On dit que X possède une espérance, si et ssi la série

$\sum_{k \geq 1}$ [redacted] est [redacted]

ii) Dans ce cas, l'espérance de X est :

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=1}}$$ [redacted]

Prop

Supp que Ω est fini.

Soit X une var sur (Ω, T, P), où $T = \mathcal{P}(\Omega)$. On a :

$$\boxed{E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\, P(}$$ [redacted]

---

2) Espérances des lois discrètes usuelles

Prop

X	$X = c$ constante	$X \sim \mathcal{U}(n)$	$X \sim \mathcal{B}(p)$	$X \sim \mathcal{B}(n,p)$
$E(X)$	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]

3) Propriétés de l'espérance

Prop (Linéarité de l'espérance)

1) Si X et Y possèdent des espérances, alors il en est de même pour toute combinaison linéaire $(\lambda X + \mu Y)$.

2) Dans ce cas on a :

$$\boxed{\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ E(\lambda X + \mu Y) =}$$ [redacted]

Vocabulaire

Si [redacted], on dit que X est une var centrée.

Prop

1) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $E(\lambda X + \mu) =$ [redacted]

2) $(X - E(X))$ est [redacted]

Prop

1) $X \geq 0 \Rightarrow E(X)$ [redacted] 0 (positivité de l'espérance)

2) $X \leq Y \Rightarrow E(X)$ [redacted] $E(Y)$ (croissance de l'espérance)

Prop

1) Soient X et Y deux var positives telles que $X \leq Y$.

Si [redacted] possède une espérance, alors [redacted] aussi.

2) Soient X et Y deux var telles que $|X| \leq Y$.

Si [redacted] possède une espérance, alors [redacted] aussi.

Prop (Espérance du produit de var indépendantes)

Si X et Y deux var discrètes indépendantes et possédant chacune une espérance, alors leur produit XY possède aussi une espérance, et on a :

$$\boxed{E(XY) = \text{[redacted]}}$$

En général, on a :

Corollaire (Espérance du produit de var d indépendantes)

Soit $n \geq 2$.

Si $X_1, \dots, X_n$ des var discrètes indépendantes et possédant chacune une espérance, alors leur produit $X_1 \cdots X_n$ possède aussi une espérance, et on a :

$$E(X_1 \cdots X_n) = \text{[redacted]}$$

Càd $$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \text{[redacted]}$$

4) Formule de transfert

Prop (Formule de transfert) (Si $X(\Omega)$ est fini)

Soit X une var discrète, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue ou monotone.

Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, où les x_k sont distincts deux à deux,

Alors

$$E(f(X)) = \sum_{k=1}^{n} \text{[redacted]} \, P(\text{[redacted]})$$

Prop (Formule de transfert) (Si $X(\Omega)$ est dénombrable)

Soit X une var discrète, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue ou monotone.

Si $X(\Omega) = \{x_k \,/\, k \in \mathbb{N}^*\}$, où les x_k sont distincts deux à deux,

Alors :

1) $f(X)$ possède une espérance $\boxed{\text{si et ssi}}$ la série $\sum_{k \geq 1} f($ [redacted] $)\,P($ [redacted] $)$ est [redacted]

2) Dans ce cas, on a : $\boxed{E(f(X)) = \sum_{k=1}^{+\infty} f(\ }$ [redacted] $)\,P($ [redacted] $)$

Prop

Soit X une var discrète.

1) On a :

X possède une espérance $\iff |X|$ [redacted]

2) Le cas échéant, on a :

$|E(X)|$ [redacted] $E(|X|)$ (Inégalité [redacted])

III) Variance d'une var

1) Moment d'une var

Déf

Soient $k \in \mathbb{N}$ et X une var sur (Ω, T, P).

1) Le moment d'ordre k de X est $E($ [redacted] $)$, sous réserve d'existence.

2) On le note m_k.

2) Variance d'une var

Déf (variance)

La variance de X est :

$$V(X) = E\Big(\big(\text{[redacted]}\big)^2\Big)$$

<<sous réserve d'existence.>>

Prop

$$V(X) = E(\text{[redacted]}) - (\text{[redacted]})^2$$

Prop

1) $V(X) = \sum_{k=1}^{n} \text{[redacted]}^2 P(\text{[redacted]})$, où $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$

⚠ 2) $V(X) = \sum_{x \in D} \text{[redacted]}^2 P(\text{[redacted]})$, où $D = X(\Omega)$ fini.

3) $V(X) = \sum_{k=1}^{\text{[redacted]}} \text{[redacted]}^2 P(\text{[redacted]})$, où $X(\Omega) = \{x_k / k \in \mathbb{N}^*\}$

Prop

1) $V(aX+b) =$ [redacted]

2) $V(X+b) =$ [redacted]

Vocabulaire

1) Si $E(X) = 0$, on dit que X est une var [redacted]

2) Si $V(X) = 1$, on dit que X est une var [redacted]

3) Si $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$, X est [redacted]

Déf

L'écart-type de X est :

$\sigma(X) =$ [redacted]

Prop

Si $V(X) \neq 0$, alors la var [redacted] est centrée réduite.

3) Covariance d'une var

Déf

Soient X et Y deux var.

La covariance de X et Y est :

$\boxed{Cov(X,Y) = E\Big(\big(\text{[redacted]}\big)\big(\text{[redacted]}\big)\Big)}$

Prop

1) $Cov(X,X) =$ [redacted]

2) $Cov(X,Y) = E($[redacted]$) -$ [redacted]

3) $V(X+Y) = V(X) +$ [redacted] $+ V(Y)$

Prop

Si X et Y sont indépendants alors :

$$\boxed{V(X+Y) = \text{[redacted]}}$$

Corollaire

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des var indépendantes, alors :

$$\boxed{V(X_1 + \dots + X_n) = \text{[redacted]}}$$

Càd : $$\boxed{V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \text{[redacted]}}$$

4) Variances des var discrètes usuelles

Prop

X	$X = c$ Constante	$X \sim \mathbb{U}(n)$	$X \sim B(p)$	$X \sim B(n,p)$
$E(X)$	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]
$V(X)$	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]

5) Inégalité de Markov – Inégalité de Bienaymé–Tchebychev

Prop (Inégalité de Markov)

Soit X une var positive. Soit $a \geqslant 0$. On a :

$E(X)$ [redacted]

Corollaire (Inégalité de Bienaymé–Tchebychev)

Soit X une var d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$. On a :

$\forall \varepsilon > 0,$ [redacted] $\leqslant$ [redacted]

Partie 2

Fin Résumé