

CONCOURS COMMUN 2003
DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES
Epreuve de Mathématiques
(toutes filières)

Problème 1

CORRECTION

Partie I

1.- Quand t tend vers $-\infty$, e^t et $\frac{1}{1+t^2}$ tendent vers 0. Donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(t) = 0.$$

2.- La droite (Ox) est donc asymptote à C_f en $-\infty$.

3.- Puisque $\frac{1}{1+t^2}$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, $f(t) = e^t \cdot o(1) = o(e^t)$. Donc

$$f(t) \text{ est négligeable devant } e^t \text{ lorsque } t \text{ tend vers } +\infty.$$

Quand t tend vers $+\infty$, $t \cdot \frac{1}{1+t^2}$ tend vers 0 et donc $\frac{1}{1+t^2} = o\left(\frac{1}{t}\right)$ puis $f(t) = o\left(\frac{e^t}{t}\right)$. Donc

$$f(t) \text{ est négligeable devant } \frac{e^t}{t} \text{ lorsque } t \text{ tend vers } +\infty.$$

Quand t tend vers $+\infty$, $\frac{e^t}{1+t^2} \sim \frac{e^t}{t^2}$. Donc

$$f(t) \text{ est équivalent à } \frac{e^t}{t^2} \text{ lorsque } t \text{ tend vers } +\infty.$$

4.- Quand t tend vers $+\infty$, $f(t) \sim \frac{e^t}{t^2}$. Cette dernière expression tend vers $+\infty$ d'après les théorèmes de croissances comparées. Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty.$$

5.- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t

$$f'(t) = e^t \frac{1}{1+t^2} + e^t \frac{-2t}{(1+t^2)^2} = \frac{e^t(t^2 - 2t + 1)}{(t^2 + 1)^2} = \frac{e^t(t-1)^2}{(t^2 + 1)^2}.$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \frac{e^t(t-1)^2}{(t^2 + 1)^2}.$$

6.- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' est strictement positive sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variations de f.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
f	0	$\frac{e}{2}$	$+\infty$

7.- f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t

$$\begin{aligned} f''(t) &= e^t \frac{(t-1)^2}{(t^2+1)^2} + 2(t-1)e^t \frac{1}{(t^2+1)^2} + e^t(t-1)^2 \frac{-4t}{(1+t^2)^3} \\ &= \frac{e^t [(t-1)^2(t^2+1) + 2(t-1)(t^2+1) - 4t(t-1)^2]}{(t^2+1)^3} = \frac{e^t(t-1) [(t-1)(t^2+1) + 2(t^2+1) - 4t(t-1)]}{(t^2+1)^3} \\ &= \frac{e^t(t-1)(t^3 - 3t^2 + 5t + 1)}{(t^2+1)^3}. \end{aligned}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, f''(t) = (t-1)(t^3 - 3t^2 + 5t + 1) \frac{e^t}{(t^2+1)^3}.$$

8.- Pour t réel, posons alors $P(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 1$. P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t

$$P'(t) = 3t^2 - 6t + 5 = 3(t-1)^2 + 2 > 0.$$

P est ainsi continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. P réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] \lim_{-\infty} P, \lim_{+\infty} P[= \mathbb{R}$ et en particulier, P s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}$ en un certain réel noté α .

Puisque pour tout réel t, $f''(t) = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^3 - 3t^2 + 5t + 1) = 0$, on a montré que l'équation $f''(t) = 0$ possède exactement deux solutions réelles, à savoir 1 et α .

9.- Puisque $P(-\frac{1}{5}) = -\frac{1}{125} - \frac{3}{25} = -\frac{14}{125} < 0 = P(\alpha)$, $P(0) = 2 > 0 = P(\alpha)$ et que P est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a

$$-\frac{1}{5} < \alpha < 0.$$

10.- Quand t tend vers 0,

$$f(t) = \frac{e^t}{1+t^2} = (1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+o(t^3))(1-t^2+o(t^3)) = 1+t-\frac{t^2}{2}-\frac{5t^3}{6}+o(t^3).$$

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} 1+t-\frac{t^2}{2}-\frac{5t^3}{6}+o(t^3).$$

En particulier, quand t tend vers 0

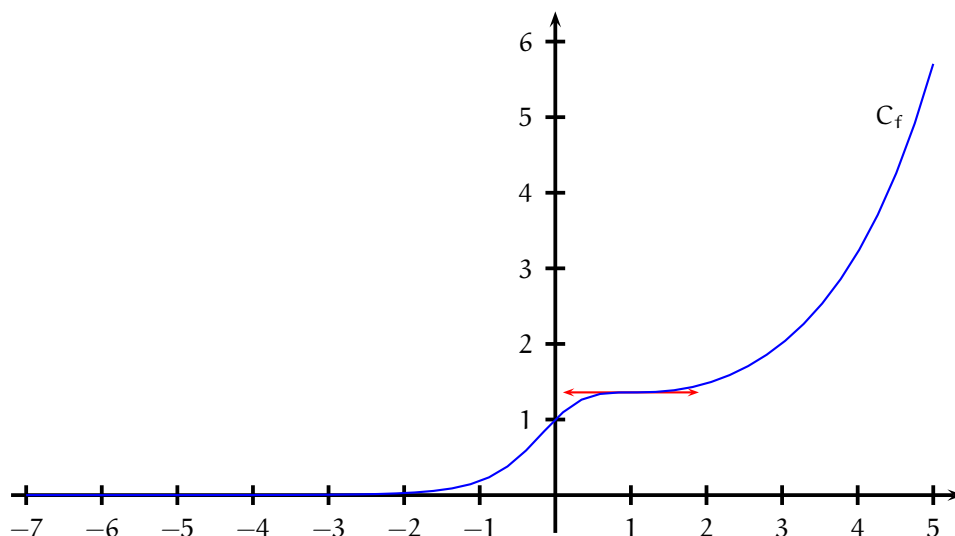
$$f(t) = 1+t+o(t).$$

Une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0 est donc $y = x + 1$. De plus, quand t tend vers 0

$$f(t) - (1+t) = -\frac{t^2}{2} + o(t^2) \sim -\frac{t^2}{2}.$$

Au voisinage de 0, la différence $f(t) - (1+t)$ est du signe de $-\frac{t^2}{2}$ et est donc négative. On en déduit que C_f est localement sous sa tangente au point d'abscisse 0.

11.- Graphe de f.



En 1, f'' s'annule en changeant de signe. Donc le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion de C_f .

Partie II

12.-

n	P_n
0	1
1	$X^2 - 2X + 1$
2	$X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 4X - 1$

13.- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons l'assertion $\mathcal{A}(n)$ acquise.

$f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t

$$\begin{aligned}
 f^{(n+1)}(x) &= \left(\frac{P_n(t)e^t}{(1+t^2)^{n+1}} \right)' = e^t \frac{P_n(t)}{(1+t^2)^{n+1}} + P_n'(t) \frac{e^t}{(1+t^2)^{n+1}} + e^t P_n(t) \frac{-(n+1)(2t)}{(1+t^2)^{n+2}} \\
 &= \frac{((P_n(t) + P_n'(t))(t^2 + 1) - 2(n+1)tP_n(t)) e^t}{(1+t^2)^{n+2}} \\
 &= \frac{P_{n+1}(t)e^t}{(1+t^2)^{n+2}} \quad \text{avec } P_{n+1} = P_n(X^2 - 2(n+1)X + 1) + P_n'(X^2 + 1).
 \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = P_n(X^2 - 2(n+1)X + 1) + P_n'(X^2 + 1).$$

14.- Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , P_n a tous ses coefficients dans $\mathbb{Z}$.

- Puisque $P_0 = 1$, P_0 a tous ses coefficients dans $\mathbb{Z}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n a tous ses coefficients dans $\mathbb{Z}$. Il en est de même de $P_n(X^2 - 2(n+1)X + 1) + P_n'(X^2 + 1)$ et donc de P_{n+1} .

On a montré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n \in \mathbb{Z}[X].$$

15.- Il est clair que P_n n'est pas le polynôme nul. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_{n+1}) = \deg(X^2 P_n) = \deg(P_n) + 2.$$

La suite $(\deg(P_n))$ est donc arithmétique de premier terme $\deg(P_0) = 0$ et de raison 2. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = 2n.$$

De même,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{dom}(P_{n+1}) = \text{dom}(X^2 P_n) = \text{dom}(P_n).$$

Puisque $\text{dom}(P_0) = 1$, on en déduit immédiatement que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{dom}(P_n) = 1.$$

16.- On évalue en i la relation de la question 13.- On obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(i) = (n+1)(-2i)P_n(i).$$

En tenant compte de $P_0(i) = 1$, on obtient par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n(i) = (-2i)^n \cdot n!.$$

Partie III

17.- Puisque f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et de plus $F' = f$. Puisque f est strictement positive sur $\mathbb{R}$,

$$F \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$

18.- et 19.- Soit x un réel négatif. Pour tout réel t de $[x, 0]$, on a

$$0 \leq \frac{e^t}{1+t^2} \leq e^t.$$

Par croissance de l'intégrale, on a alors

$$0 \leq \int_x^0 \frac{e^t}{1+t^2} dt = -F(x) \leq \int_x^0 e^t dt = 1 - e^x \leq 1.$$

Ainsi,

$$\forall x \in]-\infty, 0], -1 \leq F(x) \leq 0 \quad (**).$$

La fonction F est donc croissante sur $\mathbb{R}^-$ et minorée par -1 sur $\mathbb{R}^-$. On en déduit que F admet une limite réelle ℓ en $-\infty$. De plus, l'encadrement $(**)$ fournit par passage à la limite quand x tend vers $-\infty$:

$$-1 \leq \ell \leq 0.$$

20.- $F(0) = 0$ et $F'(0) = 1$. Une équation de la tangente à la courbe représentative de F au point d'abscisse 0 est donc $y = x$.

21.- On a vu à la question 10.- que $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 + t - \frac{t^2}{2} - \frac{5t^3}{6} + o(t^3)$. Par intégration et en tenant compte de $F(0) = 0$, on obtient

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{5x^4}{24} + o(x^4).$$

22.- Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ sont de classe C^1 sur $[0, x]$ si $x \geq 0$ et sur $[x, 0]$ si $x < 0$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\int_0^x \frac{e^t}{1+t^2} dt = \left[\frac{e^t}{1+t^2} \right]_0^x - \int_0^x \frac{e^t(-2t)}{(1+t^2)^2} dt = f(x) - 1 + 2 \int_0^x \frac{te^t}{(1+t^2)^2} dt = f(x) - 1 + 2 \int_0^1 \frac{te^t}{(1+t^2)^2} dt + 2J(x).$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = f(x) - 1 + 2 \int_0^1 \frac{te^t}{(1+t^2)^2} dt + 2J(x).$$

23.- Soit x un réel supérieur ou égal à 1. Pour tout réel t de $[1, x]$, on a

$$0 \leq \frac{te^t}{(1+t^2)^2} \leq \frac{te^t}{(0+t^2)^2} = \frac{e^t}{t^3}.$$

Par croissance de l'intégrale (et puisque $x \geq 1$), on obtient

$$\forall x \in [1, +\infty[, 0 \leq J(x) \leq K(x).$$

24.- Soit x un réel supérieur ou égal à 1. Les fonctions $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ sont de classe C^1 sur $[1, x]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$K(x) = \left[e^t \frac{1}{t^3} \right]_1^x - \int_1^x e^t \frac{-3}{t^4} dt = \frac{e^x}{x^3} - e + 3L(x),$$

et donc

$$\forall x \geq 1, K(x) - 3L(x) = \frac{e^x}{x^3} - e.$$

Mais alors, quand x tend vers $+\infty$,

$$K(x) - 3L(x) = \frac{e^x}{x^2} \left(\frac{1}{x} - e \frac{x^2}{e^x} \right) = \frac{e^x}{x^2} \cdot o(1) = o\left(\frac{e^x}{x^2}\right).$$

$$K(x) - 3L(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{e^x}{x^2}\right).$$

25.- Soit x un réel supérieur ou égal à 1.

$$\begin{aligned} 0 \leq L(x) &= \int_1^{x^{3/4}} \frac{e^t}{t^4} dt + \int_{x^{3/4}}^x \frac{e^t}{t^4} dt \\ &\leq \int_1^{x^{3/4}} \frac{e^{x^{3/4}}}{1^4} dt + \int_{x^{3/4}}^x \frac{e^t}{(x^{3/4})^4} dt = (x^{3/4} - 1)e^{x^{3/4}} + \frac{1}{x^3} \int_{x^{3/4}}^x e^t dt = (x^{3/4} - 1)e^{x^{3/4}} + \frac{1}{x^3}(e^x - e^{x^{3/4}}) \\ &\leq x^{3/4}e^{x^{3/4}} + \frac{e^x}{x^3}. \end{aligned}$$

Mais alors, pour tout réel $x \geq 1$,

$$0 \leq \frac{L(x)}{e^x/x^2} \leq x^{11/4} e^{-x+x^{3/4}} + \frac{1}{x}.$$

Quand x tend vers $+\infty$, le membre de droite de cet encadrement tend vers 0 d'après les théorèmes de croissance comparées. Il en est de même de $\frac{L(x)}{e^x/x^2}$ d'après le théorème des gendarmes.

On a montré que

$$L(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{e^x}{x^2}\right).$$

26.- D'après les questions 24.- et 25.-, quand x tend vers $+\infty$, on a

$$K(x) = 3L(x) + o\left(\frac{e^x}{x^2}\right) = o\left(\frac{e^x}{x^2}\right) + o\left(\frac{e^x}{x^2}\right) = o\left(\frac{e^x}{x^2}\right).$$

Mais alors, d'après la question 23.-, quand x tend vers $+\infty$, on a aussi

$$J(x) = o\left(\frac{e^x}{x^2}\right).$$

D'après la question 22.-, $F(x) = f(x) + A + 2J(x)$. Or, quand x tend vers $+\infty$, $f(x) \sim \frac{e^x}{x^2}$ ou ce qui revient au même, $F(x) = \frac{e^x}{x^2} + o\left(\frac{e^x}{x^2}\right)$. D'autre part, comme $\frac{e^x}{x^2}$ tend vers $+\infty$, on a $A = o\left(\frac{e^x}{x^2}\right)$.

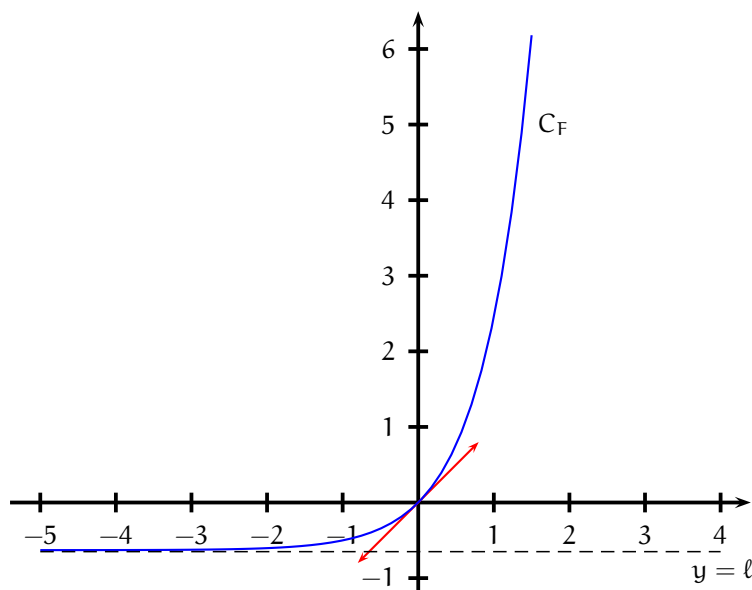
En résumé, quand x tend vers $+\infty$, $F(x) = \frac{e^x}{x^2} + o\left(\frac{e^x}{x^2}\right)$ ou encore

$$F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^2}.$$

27.-

- F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ d'après la question 17.-
- D'après les questions 18.- et 19.-, C_F admet en $-\infty$ une droite asymptote d'équation $y = \ell$ où ℓ est un certain réel de $[-1, 0]$.
- La tangente à C_F en $(0, 0)$ est la droite d'équation $y = x$ d'après la question 20.-
- La question 26.- montre que $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et que de plus C_F admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy) .
- $F'' = f'$ est positive sur $\mathbb{R}$ et donc F est convexe sur $\mathbb{R}$.

Allure de la courbe représentative de F .



FIN

