Ce qui est marqué en jaune est corrigé à présent.
Je corrigerai le reste après.

Espaces vectoriels de dimensions finies

N.B : $\mathbb{K}$ *désignera* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

Exercice 1

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, les familles suivantes sont-elles libres ?

1) (f,g,h) où f :$x \mapsto sin(x)$, g :$x \mapsto cos(x)$ et h :$x \mapsto 1$
2) (f,g,h,i) où f :$x \mapsto sin(x)$, g :$x \mapsto cos(x)$, h :$x \mapsto xsin(x)$ et i :$x \mapsto xcos(x)$
3) (f,g,h) où f :$x \mapsto sin^2(x)$, g :$x \mapsto cos^2(x)$ et h :$x \mapsto 1$
4) (f,g,h) où f :$x \mapsto sin(x)$, g :$x \mapsto cos(x)$ et h :$x \mapsto e^x$

Exercice 2

Considérons la famille $B = (Q_1, Q_2, Q_3)$ où $\begin{cases} Q_1 &=& X^2+1 \\ Q_2 &=& 3X^2-X+3 \\ Q_3 &=& X^2-X-1 \end{cases}$

B est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$? Sioui, déterminer les coordonnées de X.

Exercice 3

1) $E = F([0, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$. On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k : x \mapsto sin^k(x)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, ..., f_n)$ est libre.
2) $E = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g_k : x \mapsto e^{kx}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(g_0, ..., g_n)$ est libre.

Exercice 4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $f \in L(E)$.
Montrer que

$$(ker(f) = Im(f)) \Leftrightarrow (f^2 = 0 \ et \ n = 2rg(f))$$

Exercice 5

Soient F et G deux sev de $\mathbb{R}^5$ tels que dim(F)=dim(G)=3.
Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soient F et G deux sev de E vérifiant $dim(F) + dim(G) \succ n$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 7

Soient $a, b \in \mathbb{K}$ et $E = \{(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$

1) Montrer que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2) Considérons l'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K}^2 \\ u & \mapsto & (u_0, u_1) \end{array} \right.$.

Montrer φ est un isomorphisme. Conclure quant à la structure de E.

Exercice 8

Soit E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension 3. Soit $f \in L(E)$ nilpotent d'indice 3.

1) Justifier l'existence de $x_0 \in E$ tel que $f^2(x_0) \neq 0$.

2) Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base de E.

3) En déduire que $rg(f) = 2$.

4) Notons $C_f = \{g \in L(E) | \ gf = fg\}$

   i) Montrer que C_f est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

   ii) Montrer que (I_E, f, f^2) est une base de C_f.

Exercice 9

Soit E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in L(E)$ nilpotent d'indice n.

1) Justifier l'existence de $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$.

2) En déduire que la famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

3) Déduire que $rg(f) = n - 1$

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$ distincts deux à deux.

Posons pour tout $k \in \{0, 1, ..., n\}$, $L_k(X) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \left(\frac{X - a_j}{a_k - a_j} \right)$

1) Quel est $deg(L_k)$?

2) Calculer $L_k(a_i)$ quand $k = i$ et quand $k \neq i$.

3) Montrer que la famille $(L_k)_{0 \preceq k \preceq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. (dite *base de Lagrange*)

4) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer les coordonnées de celui-ci dans cette base.

Exercice 11

Soient E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de

E vérifiant $rg(f) = rg(f^2)$.
Montrer que $E = ker(f) \oplus Im(f)$.

Exercice 12

Soient E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.

1) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   i) $ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$
   ii) $E = ker(f) + Im(f)$
   iii) $E = ker(f) \oplus Im(f)$
2) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   i) $ker(f) = ker(f^2)$
   ii) $Im(f) = Im(f^2)$
   iii) $E = ker(f) \oplus Im(f)$
3) Soit f' la restriction de f à Im(f).
   i) Montrer que $ker(f') = ker(f) \cap Im(f)$ et $Im(f') = Im(f^2)$
   ii) En déduire que $rg(f) = rg(f^2) + dim\left(ker(f) \cap Im(f)\right)$

Exercice 13

Soient E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in L(E)$.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $I_p = Im(u^p)$ et $K_p = ker(u^p)$.

1) Montrer que :
$$\forall p \in \mathbb{N},\ K_p \subset K_{p+1}\ et\ I_{p+1} \subset I_p$$
2) Supposons que u est injectif.
   Déterminer I_p et K_p, pour tout $p \in \mathbb{N}$.
3) Supposons que u est non injectif.
   i) Montrer que : $(\exists\ 0 \preceq p \preceq n \mid K_p = K_{p+1})$
      Indice : Vous pouvez raisonner par l'absurde, puis introduire la dimension.
      r désignera le plus petit entier $0 \preceq p \preceq n$ vérifiant $K_p = K_{p+1}$.
   ii) Montrer que :
      a) $I_r = I_{r+1}$
      b) $\forall p \in \mathbb{N},\ K_r = K_{r+p}$
   iii) En déduire que $(\forall p \in \mathbb{N},\ I_r = I_{r+p})$
4) Montrer que $E = K_r \oplus I_r$

Exercice 14

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $f, g \in L(E, \mathbb{K})$.
Montrer que

$$ker(f) = ker(g) \;\Leftrightarrow\; (\exists \alpha \in \mathbb{K}^*,\; g = \alpha f)$$

Exercice 15

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g \in L(E)$ vérifiant $fg - gf = I_E$.

1) Montrer que
   i) $\forall n \succeq 1,\; fg^n - g^n f = ng^{n-1}$
   ii) $\forall n \succeq 1,\; f^n g - gf^n = nf^{n-1}$
2) Montrer que pour tout $n \succeq 1$, les familles suivantes sont libres :

$$(I_E, f, ..., f^n) \text{ et } (I_E, g, ..., g^n)$$

3) En déduire que E est de dimension infinie.
4) On veut un exemple.
   Vérifier que (E=$\mathbb{R}[X]$, $f(P) = P'$ et $g(P) = XP$) convient.

CORRECTION

CORRECTION

CORRECTION

Exercice 1

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, les familles suivantes sont-elles libres ?

1) (f,g,h) où f :$x \mapsto sin(x)$, g :$x \mapsto cos(x)$ et h :$x \mapsto 1$

1) Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Supposons que $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$

Mq que $\alpha = \beta = \gamma = 0$

On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = 0$

$\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha \sin(x) + \beta \cos(x) + \gamma = 0)$ Ω

Pour $x = 0$ et $x = \pi$, on obtient $\begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ -\beta + \gamma = 0 \end{cases}$

D'où $(\beta = 0$ et $\gamma = 0)$

Ω devient : $(\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha \sin(x) = 0)$

et $x = \pi/2 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$

Enfin la famille est libre

2) (f,g,h,i) où f :$x \mapsto sin(x)$, g :$x \mapsto cos(x)$, h :$x \mapsto xsin(x)$ et i :$x \mapsto xcos(x)$

2) Soient $\alpha, \beta, \lambda, \delta \in \mathbb{R}$.

Supp que $\alpha f + \beta g + \lambda h + \delta i = 0$

Mq que $\alpha = \beta = \lambda = \delta = 0$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha \sin(x) + \beta \cos(x) + \lambda x \sin(x) + \delta x \cos x = 0)$ Σ

$x = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 0}$

Σ devient : $(\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha \sin(x) + \lambda x \sin(x) + \delta x \cos x = 0)$

$x = \pi \Rightarrow \boxed{\delta = 0}$

Σ devient : $(\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha \sin(x) + \lambda x \sin(x) = 0)$

On veut se débarasser de $\sin(x)$.

Alors $(\forall x \in]0, \pi[,\ \alpha + \lambda x = 0)$ (car $\sin x \neq 0$ sur $]0, \pi[$)

D'où $\boxed{\alpha = \lambda = 0}$, car le polynôme $(\alpha + \lambda X)$ possède une infinité de racine

3) (f,g,h) où f :$x \mapsto sin^2(x)$, g :$x \mapsto cos^2(x)$ et h :$x \mapsto 1$

3) On a : $(\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1)$

$\Longrightarrow (f + g - h = 0)$

Et donc (f, g, h) est liée

4) (f,g,h) où f :$x \mapsto sin(x)$, g :$x \mapsto cos(x)$ et h :$x \mapsto e^x$

4) Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Supposons que $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$

Mq que $\alpha = \beta = \gamma = 0$

On a : $(\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha \sin(x) + \beta \cos(x) + \gamma e^x = 0)$ Ω

Plusieurs méthodes sont possibles :

→ via les dérivées de $\sin(x)$, $\cos x$ et e^x. Obtenir un système d'inconnues α, β, γ ....

→ En donnant à x trois valeurs, obtenir un système d'inconnues α, β, γ ....

→ Utiliser le fait que cos et sin sont deux fonctions bornées, alors que $x \mapsto e^x$ non

Appliquons cette dernière piste.

On a $(\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha \sin(x) + \beta \cos(x) = -\gamma e^x)$

Or sin et cos sont bornées alors $(\alpha \sin + \beta \cos)$ aussi

$\Longrightarrow$ la fonction $x \mapsto -\gamma e^x$ est bornée

D'où $\boxed{\gamma = 0}$, car sinon, la fonction $x \mapsto -\gamma e^x$ ne serait pas bornée, car $\lim\limits_{x \to +\infty} -\gamma e^x = \pm\infty$

Ω devient : $\left(\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha \sin(x) + \beta \cos(x) = 0\right)$

$x = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 0}$

$x = \pi/2 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$

Enfin, la famille est <u>libre</u>

Exercice 2

Considérons la famille $B = (Q_1, Q_2, Q_3)$ où $\begin{cases} Q_1 &= X^2+1 \\ Q_2 &= 3X^2 - X + 3 \\ Q_3 &= X^2 - X - 1 \end{cases}$

B est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$? Sioui, déterminer les coordonnées de X.

1) B est une base ; En effet

$\text{Card}(B) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$, alors il suffit de montrer qu'elle est <u>libre</u>.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Supposons que $\alpha Q_1 + \beta Q_2 + \gamma Q_3 = 0$

M que $\alpha = \beta = \gamma = 0$

On a $\alpha Q_1 + \beta Q_2 + \gamma Q_3 = 0$

$\Rightarrow \alpha(X^2+1) + \beta(3X^2 - X + 3) + \gamma(X^2 - X - 1) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ -\beta - \gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta - \gamma = 0 \end{cases}$ (on résout le système sans la méthode de Gauss)

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ \beta = -\gamma \\ \alpha + 3\beta - \gamma = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 2\gamma = 0 \\ \beta = -\gamma \\ \alpha - 4\gamma = 0 \end{cases}$ (remplacé par $-\gamma$)

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2\gamma \\ \alpha = 4\gamma \\ \beta = -\gamma \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\gamma = 4\gamma \\ \alpha = 2\gamma \\ \beta = -\gamma \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \quad \text{CQFD}$$

2) Notons (x, y, z) les coordonnées de X dans la base B.

On a par définition : $X = x\,Q_1 + y\,Q_2 + z\,Q_3$

$$\Rightarrow X = x(X^2+1) + y(3X^2 - X + 3) + z(X^2 - X - 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ -y - z = 1 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

(Résolvons le système via la méthode de Gauss)

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ -y - z = 1 \\ -2z = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Conclusion : Les coordonnées de X dans la base (Q_1, Q_2, Q_3) sont $(3, -1, 0)$.

Exercice 3 :

1) $E = F([0, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$. On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k : x \mapsto sin^k(x)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, ..., f_n)$ est libre.

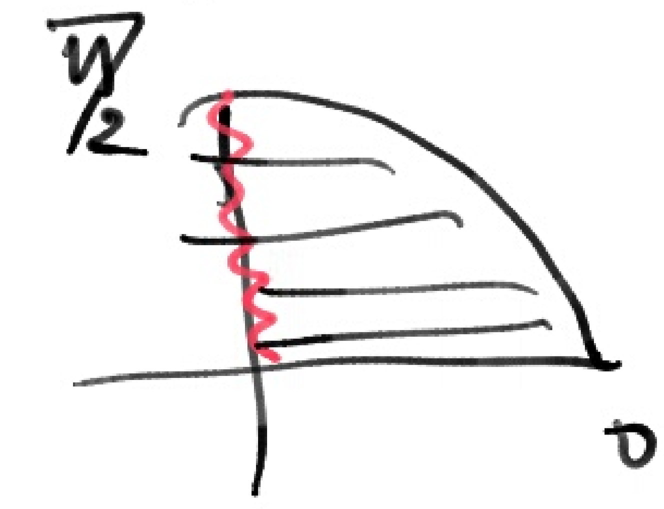
1) Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Supposons que $\alpha_0 f_0 + \dots + \alpha_n f_n = 0$

Mq que $\alpha_0 = \dots = \alpha_n = 0$

On a $\left(\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \sum_{k=0}^{n} \alpha_k f_k(x) = 0\right)$

$\Rightarrow \left(\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (\sin(x))^k = 0\right)$



$\left(\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin(x) \in [0, 1]\right)$

D'où $\left(\forall t \in [0, 1], \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k = 0\right)$

Le polynôme $\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k\right)$ possède donc une infinité de racines, donc il est nul.

D'où $(\forall\, 0 \leq k \leq n, \alpha_k = 0)$ CQFD

2) 2) $E = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g_k : x \mapsto e^{kx}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(g_0, ..., g_n)$ est libre.

Soit $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Supposons que $\alpha_0 g_0 + \cdots + \alpha_n g_n = 0$

Mq que $\alpha_0 = \cdots = \alpha_n = 0$

On a $\left(\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} \alpha_k g_k(x) = 0\right)$

$\Rightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e^{kx} = 0\right)$

$\Rightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (e^{x})^k = 0\right)$

Or $(\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0)$

Alors $\left(\forall t \in]0, +\infty[, \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k = 0\right)$

Le polynôme $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ possède donc une infinité de racines, donc il est nul.

Alors $(\forall\, 0 \leq k \leq n, \alpha_k = 0)$ CQFD

Exercice 4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $f \in L(E)$.
Montrer que

$$(ker(f) = Im(f)) \Leftrightarrow (f^2 = 0 \; et \; n = 2rg(f))$$

Exercice 4

$(\Longrightarrow)$

1) $f^2 = 0$?

Soit $x \in E$. Mq que $f^2(x) = 0$.

On a $f(x) \in Im(f)$ et $Im(f) = Ker(f)$

Donc $f(x) \in ker(f)$

$\Longrightarrow f(f(x)) = 0$, càd $\boxed{f^2(x) = 0}$

2) $n = 2rg(f)$?

D'après le théorème du rang on a :

$$\underbrace{dim(E)}_{= n} = \underbrace{dim(ker(f))}_{= dim(Im(f)) = rg(f)} + rg(f)$$

D'où $n = 2rg(f)$

$(\Longleftarrow)$ $ker(f) = Im(f)$?

On a $f^2 = 0 \Rightarrow \forall x \in E, f(f(x)) = 0$

$\Rightarrow \forall x \in E, f(x) \in Ker(f)$

$\Rightarrow Im(f) \subset Ker(f)$

et d'après le théorème du rang, on a :

$$n = dim(ker(f)) + rg(f)$$

et vu que $n = 2rg(f)$

Alors $\dim(\ker(f)) = rg(f)$

Ainsi $\begin{cases} Im(f) \subset \ker(f) \\ \dim(Im(f)) = \dim(\ker(f)) \end{cases}$

D'où $Im(f) = \ker(f)$

Exercice 5

Soient F et G deux sev de $\mathbb{R}^5$ tels que dim(F)=dim(G)=3.
Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 5

Raisonnons par l'absurde et supposons que $F \cap G = \{0\}$

Alors $\dim(F+G) = \underbrace{\dim(F)}_{=3} + \underbrace{\dim(G)}_{=3}$

$\Rightarrow \dim(F+G) = 6 > \dim(\mathbb{R}^5)$

Ce qui est absurde car $(F+G)$ sev de $\mathbb{R}^5$ et que $\dim(\mathbb{R}^5) = 5$.

Exercice 6 :

Solution calquée sur celle de Exercice 5

Exercice 8

1) f est nilpotent d'indice 3

Donc $\left(f^3 = 0 \text{ et } f^2 \neq 0\right)$

$f^2 \neq 0 \Rightarrow \left(\exists x_0 \in E,\ f^2(x_0) \neq 0\right)$

2) Il suffit de montrer que la $f^{lle}\left(x_0, f(x_0), f^2(x_0)\right) = B$ est libre Car $\text{Card}(B) = \dim(E)\ (=3)$

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ tels que : $\alpha x_0 + \beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0) = 0$ (Σ)

Mq que $\alpha = \beta = \gamma = 0$

$(\Sigma) \Rightarrow f^2\left(\alpha x_0 + \beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0)\right) = 0$

$\Rightarrow \alpha f^2(x_0) + \beta \underbrace{f^3(x_0)}_{=0} + \gamma \underbrace{f^4(x_0)}_{=0} = 0$

$\Rightarrow \alpha \underbrace{f^2(x_0)}_{\neq 0} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$

(Σ) devient : $\beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0) = 0$

Introduisons f, on aura : $\beta f^2(x_0) + \gamma \underbrace{f^3(x_0)}_{=0} = 0$

$\Rightarrow \beta \underbrace{f^2(x_0)}_{\neq 0} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\beta = 0}$

(Σ) devient : $\gamma f^2(x_0) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\gamma = 0}$; car $f^2(x_0) \neq 0$

3) $rg(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$.

On a $\begin{cases} B = (x_0, f(x_0), f^2(x_0)) \text{ base de } E \\ f \in \mathcal{L}(E) \end{cases}$

D'où $f(B) = (f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$

or $f^3(x_0) = 0$, alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(x_0), f^2(x_0))$

$\Rightarrow rg(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Vect}(f(x_0), f^2(x_0)))$

$\Rightarrow rg(f) = rg(f(x_0), f^2(x_0))$

Or $(f(x_0), f^2(x_0))$ est libre comme sous-famille de la famille libre $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$

D'où $rg(f(x_0), f^2(x_0)) = 2$

Enfin $rg(f) = 2$

4) $g \in C_f \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} gf = fg$

i) Il suffit de m que C_f est un sev de $\mathcal{L}(E)$

(a) $0 \in C_f$, car $0.f = 0$ et $f.0 = 0$

(b) Soient g et $g' \in C_f$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$

M que $(\lambda g + g') \in C_f$.

On a : $\boxed{(\lambda g + g')f} = \lambda g f + g' f$

$= \lambda f g + f g'$

$= \boxed{f(\lambda g + g')}$

D'où $(\lambda g + g') \in C_f$.

Ainsi C_f est un sev de $\mathcal{L}(E)$

ii) (I_E, f, f^2) base de C_f ?

a) libre ?

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$.
Supposons que $\alpha I_E + \beta f + \gamma f^2 = 0$
Mq que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

On a $(\alpha I_E + \beta f + \gamma f^2 = 0)$

$\Rightarrow \alpha x_0 + \beta f(x_0) + \gamma f^2(x_0) = 0$

$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$ ((car $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ libre)

b) Génératrice ?

Soit $g \in C_f$.
Mq qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{K}$ tels que :
$$g = aI_E + bf + cf^2$$

On a $g(x_0) \in E$ et $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ base de E

D'où l'existence de a, b et $c \in \mathbb{K}$ tels que :
$$g(x_0) = a x_0 + b f(x_0) + c f^2(x_0) \quad \Omega$$

Montrons que : $\{g = aI_E + bf + cf^2\}$

Il suffit de montrer que g et $(aI_E + bf + cf^2)$ sont égales en tous les vecteurs de la base $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$.

A) $g = aI_E + bf + cf^2$ en x_0 :

On a $g(x_0) = ax_0 + bf(x_0) + cf^2(x_0)$ d'après Ω

B) $g = aI_E + bf + cf^2$ en $f(x_0)$?

On a $(aI_E + bf + cf^2)(f(x_0)) = a f(x_0) + b f^2(x_0) + c f^3(x_0)$ (ω)

Et on a $g(f(x_0)) = f(g(x_0))$ (car $gf = fg$)

or $g(x_0) = a x_0 + b f(x_0) + c f^2(x_0)$

Alors $g(f(x_0)) = a f(x_0) + b f^2(x_0) + c f^3(x_0)$ (ω')

De (ω) et (ω') on conclut.

C) $g = aI_E + bf + cf^2$ en $f^2(x_0)$?

On a $(aI_E + bf + cf^2)(f^2(x_0)) = a f^2(x_0) + b f^3(x_0) + c f^4(x_0)$ (ω)

Et on a $g(f^2(x_0)) = f^2(g(x_0))$ (car $gf = fg$)

or $g(x_0) = a x_0 + b f(x_0) + c f^2(x_0)$

Alors $g(f^2(x_0)) = a f^2(x_0) + b f^3(x_0) + c f^4(x_0)$ (ω')

De (ω) et (ω') on conclut.

Exercice 9

1) On a f nilpotent d'indice n

$$\Rightarrow \left(f^{n}=0 \text{ et } f^{n-1}\neq 0\right)$$

$$f^{n-1}\neq 0 \iff \left(\exists x_0\in E,\ f^{n-1}(x_0)\neq 0\right)$$

2) $\mathrm{Card}\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\right)=\dim(E)\ (=n)$

D'où il suffit de montrer que $\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\right)$ est libre.

Soit alors $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\in\mathbb{K}$ tels que :

$$\left(\alpha_0 x_0+\alpha_1 f(x_0)+\dots+\alpha_{n-1} f^{n-1}(x_0)=0\right) \quad \Omega$$

Mq que $\alpha_0=\alpha_1=\dots=\alpha_{n-1}=0$.

Composons par f^{n-1} dans Ω. On obtient :

$$\alpha_0 f^{n-1}(x_0)+\alpha_1 \underbrace{f^{n}(x_0)}_{=0}+\dots+\alpha_{n-1} \underbrace{f^{2n-2}(x_0)}_{=0}=0$$

$$\Rightarrow \alpha_0 f^{n-1}(x_0)=0$$

et puisque $f^{n-1}(x_0)\neq 0$, alors $\boxed{\alpha_0=0}$.

Ω devient : $\alpha_1 f(x_0)+\dots+\alpha_{n-1} f^{n-1}(x_0)=0$

Composons par f^{n-2}, on obtient :

$$\alpha_1 f^{n-1}(x_0)=0 \quad ; \text{car } f^{n}=f^{n+1}=\dots=0$$

et $f^{n-1}(x_0)\neq 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_1=0}$

Ω devient : $\alpha_2 f^{2}(x_0)+\dots+\alpha_{n-1} f^{n-1}(x_0)=0$

On compose par f^{n-3}, on obtient $\alpha_2 \underbrace{f^{n-1}(x_0)}_{\neq 0}=0$

$\Rightarrow \boxed{\alpha_2=0}$

De proche en proche, on annulera tous les α_k.

3) $rg(f) = dim(Im(f))$

$B = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ base de E

Donc $f(B) = (f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0))$ f^{lle} génératrice de $Im(f)$

$\Longrightarrow Im(f) = Vect(f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0), 0)$

$\Longrightarrow Im(f) = Vect(f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$

D'où $rg(f) = dim(Vect(f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)))$

$= rg(f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$

D'autre part, $(f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est libre car sous-famille de la famille libre $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$.

D'où $rg(f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)) = n-1$

$\Longrightarrow rg(f) = n-1$

Exercice 10

1) $\deg(L_k) = \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \overbrace{\deg\left(\frac{X-a_j}{a_k-a_j}\right)}^{=1} = n$

2) $L_k(a_i) = 1$ si $k=i$; car $L_k(a_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \left(\overbrace{\frac{a_k-a_j}{a_k-a_j}}^{1}\right) = 1$

$L_k(a_i) = 0$ si $k\neq i$; car a_i est une racine de $L_k(X)$

3) Il suffit de m que $B=(L_k)_{0\leq k\leq n}$ est libre, car $\mathrm{Card}(B) = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$.

Soit alors $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k = 0$

M que $\alpha_0 = \dots = \alpha_n = 0$

Soit $0\leq i\leq n$. M que $\alpha_i = 0$.

On a $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k(a_i) = 0$

Or $(\forall k\neq i, L_k(a_i) = 0)$

Alors $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k(a_i) = \alpha_i L_i(a_i)$

Et donc $\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k(a_i) = 0\right) \Rightarrow \alpha_i \overbrace{L_i(a_i)}^{=1} = 0$

$\Rightarrow \alpha_i = 0$ / CQFD

4) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Notons $x_0, \dots, x_n$ les coordonnées de P dans la base $(L_0, \dots, L_n)$.

On a $P = x_0 L_0 + \dots + x_n L_n = \sum_{k=0}^{n} x_k L_k$

Soit $i \in \{0, \dots, n\}$, déterminons x_i :

On a $P(a_i) = \sum_{k=0}^{n} x_k L_k(a_i) = x_i \underbrace{L_i(a_i)}_{=1}$ (car $\forall k\neq i$, $L_k(a_i) = 0$)

D'où : $\forall\, 0\leq i\leq n,\ x_i = P(a_i)$

Exercice 11

On a : $\dim(E) = n$, $f \in \mathcal{L}(E)$; $rg(f) = rg(f^2)$

On veut m que $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$

Il s'agit de m que
$$\begin{cases} 1)\ \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\} \\ 2)\ \dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) \end{cases}$$
car E est de dimension finie.

Pour 2) ça provient du théorème du rang.

Pour 1) :

Soit $x \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. M que $x = 0$:

On a $rg(f) = rg(f^2)$

Et on a $\begin{cases} \dim(E) = \dim(\ker(f)) + rg(f) \\ \dim(E) = \dim(\ker(f^2)) + rg(f^2) \end{cases}$

D'où $\dim(\ker(f)) = \dim(\ker(f^2))$

Or $\ker(f) \subset \ker(f^2)$

(car $x \in \ker(f) \Rightarrow f(x) = 0$
$\Rightarrow f^2(x) = 0$
$\Rightarrow x \in \ker(f^2)$)

Alors $\ker(f) = \ker(f^2)$

On a $x \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ \exists t \in E,\ x = f(t) \end{cases}$

$x = f(t) \Rightarrow f(x) = f^2(t)$

et $f(x) = 0 \Longrightarrow f^2(t) = 0$

$\Rightarrow t \in ker(f^2)$

$\Rightarrow t \in ker(f)$

$\Rightarrow \underbrace{f(t)}_{\shortparallel \atop x} = 0$

$\Rightarrow x = 0$ (CQFD)

Exercice 12

i) $ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$

ii) $E = ker(f) + Im(f)$

iii) $E = ker(f) \oplus Im(f)$

1) i) $\Longrightarrow$ ii) ?

Supposons que $ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$.

Montrons que : $E = ker(f) + Im(f)$

$(ker(f) + Im(f))$ est un sev de E, alors il suffit de montrer que $\dim(ker(f) + Im(f)) = \dim(E)$

Et on a :

$$\dim(ker(f) + Im(f)) = \dim(ker(f)) + \dim(Im(f)) \quad \text{(car } ker(f) \text{ et } Im(f) \text{ en somme directe)}$$

$$= \dim(E) \quad \text{(d'après thm du rang)}$$

ii) $\Longrightarrow$ iii) ?

On a $E = ker(f) + Im(f)$

Et on veut montrer que $E = ker(f) \oplus Im(f)$.

Il reste à montrer que $ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$

On a $\dim(E) = \dim(ker(f) + Im(f))$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dim(E) = \dim(ker(f)) + \dim(Im(f)) - \dim(ker(f) \cap Im(f)) \\ \text{d'après la formule de Grassmann} \end{array} \right.$

$\Rightarrow \dim(ker(f) \cap Im(f)) = 0$ (d'après le thm du rang)

D'où $ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$ (CQFD)

$iii) \Rightarrow i)$ Évidente

i) $ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$
ii) $E = ker(f) + Im(f)$
iii) $E = ker(f) \oplus Im(f)$

$2)$ $i) \Rightarrow ii)$?

i) $ker(f) = ker(f^2)$
ii) $Im(f) = Im(f^2)$
iii) $E = ker(f) \oplus Im(f)$

On a $ker(f) = ker(f^2)$
Et on veut montrer que $Im(f) = Im(f^2)$
D'après le théorème du rang appliqué à f, on a

$$\dim(E) = \dim(ker(f)) + \dim(Im(f))$$

Et d'après le théorème du rang appliqué à f^2, on a

$$\dim(E) = \dim(ker(f^2)) + \dim(Im(f^2))$$

Et puisque $\dim(ker(f)) = \dim(ker(f^2))$
Alors $\dim(Im(f)) = \dim(Im(f^2))$

Or $Im(f^2) \subset Im(f)$
Car $y \in Im(f^2) \Rightarrow \exists t \in E, y = f^2(t)$
$\Rightarrow y = f(f(t)) \in Im(f)$

D'où $Im(f) = Im(f^2)$

$ii) \Rightarrow i)$?
En procédant comme ci-dessus, on tire que
$\dim(ker(f)) = \dim(ker(f^2))$
Or $ker(f) \subset ker(f^2)$
Alors $ker(f) = ker(f^2)$

On veut montrer que $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Il s'agit de montrer que $\begin{cases} 1) \ \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\} \\ 2) \ \dim(E) = \dim \ker(f) + \dim \mathrm{Im} f \end{cases}$

Pour 2) ça vient du théorème du rang.

Alors ça reste à m que $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$.

Soit alors $x \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. M que $x = 0$.

On a $x \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ \exists t \in E, \ x = f(t) \end{cases}$

$$(x = f(t)) \Rightarrow f(x) = f^2(t)$$

$$\text{et } f(x) = 0 \Longrightarrow f^2(t) = 0$$

$$\Rightarrow t \in \ker(f^2)$$

$$\Rightarrow t \in \ker(f) \quad (\text{car } \ker(f) = \ker(f^2))$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(t)}_{x} = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad (\text{CQFD})$$

iii) $\Rightarrow$ i)

On a : $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

On veut m que $\ker(f) = \ker(f^2)$

- M que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$:

On a : $x \in \ker(f) \Rightarrow f(x) = 0$
$\Rightarrow f^2(x) = 0$
$\Rightarrow x \in \ker(f^2)$

- M que $\ker(f^2) \subset \ker(f)$:

Soit $x \in \ker(f^2)$. M que $x \in \ker(f)$.

On a $f^2(x) = 0 \Rightarrow f(f(x)) = 0$

$\Rightarrow f(x) \in \ker(f)$

Or $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, alors $f(x) \in \mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$

$\Rightarrow f(x) = 0$

$\Rightarrow x \in \ker(f)$

3) i)

$f' : \mathrm{Im}(f) \longrightarrow E$
$x \longmapsto f'(x) = f(x)$

a) M. que $\ker(f') = \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$:

$$\ker(f') \overset{\text{déf}}{=} \{x \in \mathrm{Im}(f) \,/\, f'(x) = 0\}$$
$$= \{x \in \mathrm{Im}(f) \,/\, f(x) = 0\}$$
$$= \{x \in \mathrm{Im}(f) \,/\, x \in \ker(f)\} = \mathrm{Im}(f) \cap \ker(f)$$

b) M que $\mathrm{Im}(f') = \mathrm{Im}(f^2)$

$$\mathrm{Im}(f') \overset{\text{déf}}{=} \{f'(x) \,/\, x \in \mathrm{Im}(f)\}$$
$$= \{f(x) \,/\, x \in \mathrm{Im}(f)\}$$
$$= \{f(f(t)) \,/\, t \in E\}$$
$$= \mathrm{Im}(f^2)$$

ii) Déduisons que $rg(f) = rg(f^2) + \dim(\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f))$

Appliquons le théorème du rang à $f' : \begin{array}{l} \mathrm{Im}(f) \longrightarrow E \\ x \longmapsto f'(x) = f(x) \end{array}$

On a $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\ker(f')) + \dim(\mathrm{Im}(f'))$

or $\begin{cases} \ker(f') = \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) \\ \mathrm{Im}(f') = \mathrm{Im}(f^2) \end{cases}$

Alors $rg(f) = \dim(\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)) + rg(f')$

Exercice 13

$\dim(E) = n$
$u \in \mathcal{L}(E)$
$I_p = \mathrm{Im}(u^p)$; $K_p = \mathrm{Ker}(u^p)$

1) i) $K_p \subset K_{p+1}$?

$$x \in K_p \Rightarrow u^p(x) = 0$$
$$\Rightarrow u(u^p(x)) = 0$$
$$\Rightarrow u^{p+1}(x) = 0$$
$$\Rightarrow x \in K_{p+1}$$

ii) $I_{p+1} \subset I_p$?

$$x \in I_{p+1} \Rightarrow (\exists t \in E, x = u^{p+1}(t))$$
$$\Rightarrow x = u^p(u(t)) \in \mathrm{Im}(u^p) = I_p$$

2) Supposons que u est injectif :

i) $I_p = ?$

$I_p = \mathrm{Im}(u^p)$ et $u^p \in \mathcal{L}(E)$

u injectif $\Rightarrow u^p$ est injectif

et E de dimension finie

d'où $\mathrm{Im}(u^p) = E$

Càd $I_p = E$

ii) $K_p = ?$

On a $K_p = \mathrm{Ker}(u^p)$ et u^p injectif

d'où $K_p = \{0\}$

3) Supposons que u n'est pas injectif.

i) M que : $(\exists\, 0 \leq p \leq n,\ K_p = K_{p+1})$

Raisonnons par l'absurde, et supposons que :

$$(\forall\, 0 \leq p \leq n,\ K_p \neq K_{p+1})$$

Or K_p est un sev de K_{p+1} Car $K_p \subset K_{p+1}$

Alors $\forall\, 0 \leq p \leq n,\ \dim(K_p) \leq \dim(K_{p+1})$

Et puisque $K_p \neq K_{p+1}$, alors :

$$(\forall\, 0 \leq p \leq n,\ \dim(K_p) < \dim(K_{p+1}))$$

Ainsi

$$\begin{cases} \dim(K_0) < \dim(K_1) \\ \dim(K_1) < \dim(K_2) \\ \vdots \\ \dim(K_n) < \dim(K_{n+1}) \end{cases}$$

Càd

$$\begin{cases} \dim(K_0) \leq \dim(K_1) - 1 \\ \dim(K_1) \leq \dim(K_2) - 1 \\ \vdots \\ \dim(K_n) \leq \dim(K_{n+1}) - 1 \end{cases}$$

Par sommation et simplifications, on obtient :

$$\dim(K_0) \leq \dim(K_{n+1}) - (n+1)$$

D'autre part, $K_0 = \operatorname{Ker}(u^0) = \operatorname{Ker}(I_E) = \{0\}$

Donc $\dim(K_0) = 0$.

Enfin $\dim(K_{n+1}) \geq n+1$

Ce qui est absurde, car K_{n+1} sev de E et $\dim(E)=n$

ii) a) $I_r = I_{r+1}$?

ii) Montrer que :

a) $I_r = I_{r+1}$

b) $\forall p \in \mathbb{N},\ K_r = K_{r+p}$

On a $K_r = K_{r+1}$

Appliquons le théorème du rang aux endomorph u^r et u^{r+1}, on a
$$\begin{cases} \dim(E) = \dim(K_r) + \dim(I_r) \\ \dim(E) = \dim(K_{r+1}) + \dim(I_{r+1}) \end{cases}$$

D'où $\dim(I_r) = \dim(I_{r+1})$

Or I_{r+1} est un sev de I_r, car $I_{r+1} \subset I_r$

D'où $I_{r+1} = I_r$

b) M que : $(\forall p \in \mathbb{N},\ K_r = K_{r+p})$

Faisons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Pour $p=0$ (Evidente)

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que $K_r = K_{r+p}$ et montrons que $K_r = K_{r+p+1}$

☆ $K_r \subset K_{r+p+1}$?

On a $K_r = K_{r+p} \subset K_{r+p+1}$ d'après 1°)

☆ $K_{r+p+1} \subset K_r$?

Soit $x \in K_{r+p+1}$. M que $x \in K_r$.

On a $x \in K_{r+p+1} \Longrightarrow u^{r+p+1}(x) = 0$

$\Longrightarrow u^{r+p}(u(x)) = 0$

$\Longrightarrow u(x) \in K_{r+p}$

$\Longrightarrow u(x) \in K_r$ (Hypoth de récur)

$\Longrightarrow u^r(u(x)) = 0$

$$\Longrightarrow u^{r+1}(x) = 0$$

$$\Longrightarrow x \in K_{r+1} = K_r$$

iii) Soit $p \in \mathbb{N}$. M que $I_r = I_{r+p}$.

D'après le théorème du rang appliqué aux endomorphismes u^r et u^{r+p}, on a :
$$\begin{cases} \dim(E) = \dim(K_r) + \dim(I_r) \\ \dim(E) = \dim(K_{r+p}) + \dim(I_{r+p}) \end{cases}$$

Or $K_r = K_{r+p}$ d'après 3/ii/b)

Alors $\dim(I_r) = \dim(I_{r+p})$

Et puisque I_{r+p} est un sev de I_r (car $I_{r+p} \subset I_r$)

Alors $I_{r+p} = I_r$

4) Montrer que $E = K_r \oplus I_r$

4) Il s'agit de m que :
$$\begin{cases} \text{i) } K_r \cap I_r = \{0\} \\ \text{ii) } \dim(E) = \dim(K_r) + \dim(I_r) \end{cases}$$

ii) provient du théorème du rang.

Montrons i)

Soit alors $x \in K_r \cap I_r$. M que $x = 0$.

On a $\begin{cases} u^r(x) = 0 \\ \exists t \in E,\ x = u^r(t) \end{cases}$

Et $x = u^r(t) \Longrightarrow u^r(x) = u^{2r}(t)$

Avec $u^r(x) = 0$, on a $u^{2r}(t) = 0$

$\Longrightarrow t \in K_{2r}$

$\Longrightarrow t \in K_r$ car $K_{2r} = K_r$ (3/ii/b)

$\Longrightarrow \underbrace{u^r(t)}_{=x} = 0$; Enfin $x = 0$

Exercice 14

f et $g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$
$\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$

$$ker(f) = ker(g) \ \Leftrightarrow\ (\exists \alpha \in \mathbb{K}^*,\ g = \alpha f)$$

$(\Leftarrow)$ On a $(\exists \alpha \in \mathbb{K}^*, g = \alpha f)$

M que $Ker(f) = Ker(g)$:

$x \in ker(g) \Leftrightarrow g(x) = 0$ $\qquad x \in ker(f)$

$\Leftrightarrow \alpha f(x) = 0$

$\Leftrightarrow f(x) = 0$ (car $\alpha \in \mathbb{K}^*$)

$\Leftrightarrow x \in Ker(f)$

D'où $ker(f) = Ker(g)$

$(\Rightarrow)$ Supp que : $ker(f) = ker(g)$

M qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que $g = \alpha f$:

On a $ker(f)$ sev de E.

Soit G un sev supplémentaire de $ker(f)$

On a $E = ker(f) \oplus G$

Notons que pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on a :

$$g = \alpha f \Leftrightarrow \begin{cases} g = \alpha f \text{ sur } ker(f) \\ g = \alpha f \text{ sur } G \end{cases}$$

Et sur $ker(f)$, on a bien $g = \alpha f$

Reste à montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que $g = \alpha f$ sur G.

D'autre part, d'après le théorème du rang, on a :

$$\boxed{n = \dim(ker(f)) + \dim(Im(f))}$$

Et $E = ker(f) \oplus G \Rightarrow \boxed{n = \dim(ker(f)) + \dim(G)}$

D'où $\dim(G) = \dim(\mathrm{Im}(f)) \in \{0,1\}$
Car $\mathrm{Im}(f)$ sev de $\mathbb{K}$.

Cas 1 : Si $\dim(G) = 0$
Alors $G = \{0\}$
Tout $\alpha \in \mathbb{K}^*$ convient.

$$\begin{cases} \forall x \in G = \{0\},\ g(x) = 0 \\ \forall x \in G = \{0\},\ \alpha f(x) = 0 \end{cases}$$

Cas 2 Si $\dim(G) = 1$
$\Rightarrow (\exists a \in E \setminus \{0\},\ G = \mathrm{Vect}(a))$

On cherche $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que $g = \alpha f$ sur $\mathrm{Vect}(a)$.

On a $(g = \alpha f \text{ sur } \mathrm{Vect}(a)) \overset{!}{\Leftrightarrow} g(a) = \alpha \cdot f(a)$
$\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{g(a)}{f(a)}$

Pour finir et dire que $\alpha = \dfrac{g(a)}{f(a)}$ convient, on doit vérifier que $f(a) \neq 0$ et que $g(a) \neq 0$.

On a $G \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\} \Rightarrow \mathrm{Vect}(a) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$
Or $(a \in \mathrm{Vect}(a)$ et $a \neq 0)$
Alors $a \notin \mathrm{Ker}(f)$
$\Rightarrow f(a) \neq 0$
Et aussi $g(a) \neq 0$ car $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$

1) Montrer que

i) $\forall n \succeq 1,\ fg^n - g^n f = ng^{n-1}$

ii) $\forall n \succeq 1,\ f^n g - g f^n = n f^{n-1}$

Exercice 15

f et $g \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant : $fg - gf = I_E$

(Hypothèses)

1) i) Par récurrence sur $n \geq 1$.

Initialisation : Pour $n=1$.

On a $\begin{cases} fg^1 - g^1 f = fg - gf = I_E \\ 1\, g^{1-1} = g^0 = I_E \end{cases}$

Alors la propriété est vraie pour $n=1$

Hérédité :

Soit $n \geq 1$. Supposons que $\left(fg^n - g^n f = ng^{n-1}\right)$

Et montrons que $\left(fg^{n+1} - g^{n+1} f = (n+1)g^n\right)$

On a :

$$\begin{aligned} fg^{n+1} &= (fg^n)\, g \\ &= (g^n f + ng^{n-1})\, g \quad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\ &= g^n (fg) + ng^n \\ &= g^n (gf + I_E) + ng^n \\ &= g^{n+1} f + (n+1) g^n \end{aligned}$$

Enfin $fg^{n+1} - g^{n+1} f = (n+1) g^n$

ii) Pareil à i)

2)

i) M que, $(\forall n \geq 1, (I_E, f, \dots, f^n)$ est libre$)$

Par récurrence sur $n \geq 1$.

<u>Initialisation</u> : Pour $n=1$.

M que (I_E, f) est libre.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha I_E + \beta f = 0$. Ω

M que $\alpha = \beta = 0$.

Composons par g, on aura : $\begin{cases} \alpha g + \beta g f = 0 \\ \alpha g + \beta f g = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \beta (\underbrace{fg - gf}_{= I_E}) = 0$

$\Rightarrow \beta I_E = 0$

D'où $\beta = 0$

Ω devient $\alpha I_E = 0$

D'où $\alpha = 0$

<u>Hérédité</u>

Soit $n \geq 1$.

Supposons que $(I_E, f, \dots, f^n)$ est libre.

Et m que $(I_E, f, \dots, f^{n+1})$ est libre.

Soit alors $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\left(\alpha_0 I_E + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n+1} f^{n+1} = 0\right) \quad \Omega$$

M que $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n+1} = 0$

Composons dans Ω par g.

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 g + \alpha_1 g f + \dots + \alpha_{n+1} g f^{n+1} = 0 \\ \alpha_0 g + \alpha_1 f g + \dots + \alpha_{n+1} f^{n+1} g = 0 \end{cases}$$

Soustrayons, on aura :

$$\alpha_1(fg-gf)+\dots+\alpha_{n+1}(f^{n+1}g-gf^{n+1})=0$$

Or $(\forall k \geq 1,\ f^k g - g f^k = k f^{k-1})$

Alors $\alpha_1 I_E + \dots + \alpha_{n+1}\cdot(n+1) f^n = 0$

Or $(I_E, \dots, f^n)$ est libre, par hypothèse de récurrence

D'où $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n+1} = 0$

Ω devient $(\alpha_0 I_E = 0)$

D'où $\alpha_0 = 0$

ii) Pour : $(\forall n \geq 1, (I_E, g, \dots, g^n)$ est libre$)$

C'est pareil à i)

3) En déduire que E est de dimension infinie.

3) Raisonnons par l'absurde et supposons que E est de dimension finie. Notons $\dim(E)=n$

Alors $\mathcal{L}(E)$ est aussi de dimension finie et $\dim(\mathcal{L}(E))=n^2$

D'après 2°/, la famille $(I_E, f, \dots, f^{n^2})$ est une famille libre de l'espace $\mathcal{L}(E)$

D'où $\underbrace{\mathrm{Card}(I_E, f, \dots, f^{n^2})}_{=n^2+1} \leq \underbrace{\dim(\mathcal{L}(E))}_{=n^2}$

Ce qui est absurde

4) On veut un exemple.

Vérifier que ($E=\mathbb{R}[X]$, $f(P)=P'$ *et* $g(P)=XP$) *convient.*

Il s'agit de vérifier que ces applications f et g vérifient $f,g \in L(E)$ et $fg-gf=I_E$.

☆ Pour f et $g \in \mathcal{L}(E)$: (facile)

☆☆ Mq que $fg - gf = I_E$.

Soit alors $P \in E$. Mq que $(fg-gf)(P) = P$:

On a :

$$\boxed{(fg-gf)(P)} = f(g(P)) - g(f(P))$$

$$\left(f(P) = P' \text{ et } g(P) = XP \right)$$

$$= f(XP) - g(P')$$

$$= (XP)' - XP'$$

$$= (P + XP') - XP'$$

$$= \boxed{P}$$

FIN