Convexité

Exercice 1 :

Montrer les inégalités suivantes via la convexité :

1) $\forall x \succeq 0,\ \sinh(x) \succeq x$
2) $\forall x \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) \preceq x$
3) $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}],\ \frac{2}{\pi}x \preceq \sin x \preceq x$
4) $\forall x \in [0,1],\ 1+x \preceq e^x \preceq 1+(e-1)x$
5) $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \succeq 0,\ x^{n+1}-(n+1)x+n \succeq 0$
6) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x_1,\cdots,x_{2^n} \in \mathbb{R}^+,\ \left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k\right)^{\frac{1}{2^n}} \preceq \dfrac{\sum_{k=1}^{2^n} x_k}{2^n}$

   Inégalité vue et démontrée dans le TD de <Récurrence>
7) $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}],\ \cos(x) \succeq 1-\frac{2}{\pi}x$

   (Extrait du CNC MP 2014)

Exercice 2 :

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x_1,\cdots,x_n \in \mathbb{R}^{+*},\ \frac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}} \preceq \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \preceq \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} \preceq \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}{n}}$$

(La deuxième inégalité s'appelle "L'inégalité arithmético-géométrique")

Exercice 3 :

Considérons la fonction

$$f:\ \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(\ln x) \end{array}$$

1) Montrer que f est concave.
2) En déduire que

$$\forall x,y \in]1,+\infty[,\ \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \succeq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$$

Exercice 4 :

1) Montrer que :

   a) La fonction $x \longmapsto \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$

   b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x_1, \cdots, x_n \in\ ]0, +\infty[,\ 1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \preceq \left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right)^{\frac{1}{n}}$

2) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall a_1, \cdots, a_n \succ 0,\ \forall b_1, \cdots, b_n \succ 0,\ \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{\frac{1}{n}} \preceq \left(\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 5 :

Soit $(p,q) \in]0, +\infty[^2$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1) Montrer que :

   a) $\forall (a,b) \in]0, +\infty[^2,\ \sqrt[p]{a}\sqrt[q]{b} \preceq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$

   b) $\forall (a,b) \in]0, +\infty[^2,\ ab \preceq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$
   Dite inégalité de Young

2) En déduire que

$$\forall\ (a_1, a_2, b_1, b_2) \in]0, +\infty[^4,\ \frac{a_1 b_1}{\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p}\sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}} \preceq \frac{1}{p}\frac{a_1^p}{a_1^p + a_2^p} + \frac{1}{q}\frac{b_1^q}{b_1^q + b_2^q}$$

3) Conclure alors que

$$\forall\ (a_1, a_2, b_1, b_2) \in]0, +\infty[^4,\ a_1 b_1 + a_2 b_2 \preceq \sqrt[p]{a_1^p + a_2^p}\sqrt[q]{b_1^q + b_2^q}$$

4) Montrer qu'en général, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n) \in\ ]0, +\infty[^{2n},\ \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \preceq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} a_k^p}\sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n} b_k^q}$$

   NB :

   a) *Cette inégalité s'appelle l'inégalité de Minkowski.*

   b) Pour $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Scwarz.