

INTÉGRATION SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE

1) Convergence d'une intégrale impropre (ou généralisée)

Définition 1 :

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ CPM, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1) i) On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si la fonction $y \mapsto \int_a^y f(x)dx$ a une limite dans \mathbb{K} quand y tend vers b .

ii) Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

2) En cas de convergence, on écrit $\lim_{y \rightarrow b} \left(\int_a^y f(x)dx \right) = \int_a^b f(x)dx$

Définition 2 :

Soit $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ CPM, où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

1) i) On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si la fonction $y \mapsto \int_y^b f(x)dx$ a une limite dans \mathbb{K} quand y tend vers a .

ii) Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

2) En cas de convergence, on écrit $\lim_{y \rightarrow a} \left(\int_y^b f(x)dx \right) = \int_a^b f(x)dx$

Définition 3 :

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ CPM, où $a < b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soit $c \in]a, b[$.

1) i) On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si les intégrales $\int_a^c f(x)dx$ et $\int_c^b f(x)dx$ convergent.

ii) Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

2) En cas de convergence, on écrit $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Proposition 4 :

Soit I un intervalle dont les extrémités inférieure et supérieure (dans $\overline{\mathbb{R}}$) sont notées a et b respectivement.

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction CPM et F une primitive de f sur I .

- 1) $\int_I f(x)dx$ est *convergente* si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow b} F(x)$ existent dans \mathbb{K} .
- 2) Auquel cas on a $\int_I f(x)dx = \lim_{x \rightarrow b} F(x) - \lim_{x \rightarrow a} F(x)$, noté $[F(x)]_a^b$.

Proposition 5 :

Soit $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ CPM, où $a, b \in \mathbb{R}$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe dans \mathbb{K} , **alors** l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ **converge**.

La Proposition 5 est à adapter au cas de $[a, b[$ et quand $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ existe dans \mathbb{K}

Définition 6 :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ CPM, où I intervalle de \mathbb{R} .

- 1) L'intégrale $\int_I f(x)dx$ est dite **absolument convergente** si et seulement si l'intégrale $\int_I |f(x)|dx$ converge.
- 2) On dit aussi que la fonction f est **intégrable** sur I .

NB :

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et **positive** alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1) f est *intégrable* sur I .
- 2) L'intégrale $\int_I f(x)dx$ est *absolument convergente*.
- 3) L'intégrale $\int_I f(x)dx$ est *convergente*.

Proposition 7 :

Si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ CPM.

- 1) $\int_I f(x)dx$ converge $\Leftrightarrow \left(\int_I \operatorname{Re}(f(x))dx \text{ et } \int_I \operatorname{Im}(f(x))dx \text{ convergent} \right)$
- 2) Dans ce cas on a :

$$\int_I f(x)dx = \int_I \operatorname{Re}(f(x))dx + i \int_I \operatorname{Im}(f(x))dx$$

2) Intégrabilité des fonctions de référence

Proposition 1 : (Intégrales de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) i) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$

ii) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ diverge $\Leftrightarrow \alpha \leq 1$

iii) Si $\alpha > 1$ alors $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha - 1}$

iv) Si $\alpha \leq 1$ alors $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = +\infty$

2) i) $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge $\Leftrightarrow \alpha < 1$

ii) $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ diverge $\Leftrightarrow \alpha \geq 1$

iii) Si $\alpha < 1$ alors $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1 - \alpha}$

iv) Si $\alpha \geq 1$ alors $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = +\infty$

3) Soient $a < b \in \mathbb{R}$. On a :

i) $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx$ converge $\Leftrightarrow \alpha < 1$

ii) $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx$ converge $\Leftrightarrow \alpha < 1$

Proposition 2 : (Autres fonctions intégrables usuelles)

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$ converge $\Leftrightarrow \lambda > 0$

ii) Si $\lambda > 0$ alors $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$

2) $\int_0^1 |\ln(x)| dx$ converge.

3) Cas des fonctions positives et relations de comparaisons

Proposition 1 :

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ CPM et positive, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1) $\int_a^b f(x) dx$ converge si et seulement si la fonction $y \mapsto \int_a^y f(x) dx$ est majorée.

2) Si $\int_a^b f(x) dx$ diverge, on écrit $\int_a^b f(x) dx = +\infty$

NB 1 :

De même, si $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ CPM et **positive**, où $b \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

- 1) $\int_a^b f(x) dx$ converge si et seulement si la fonction $y \mapsto \int_y^b f(x) dx$ est majorée.
- 2) Si $\int_a^b f(x) dx$ diverge, on écrit $\int_a^b f(x) dx = +\infty$

Proposition 2

Soient f et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ CPM et **positives**.

Supposons que : $[\forall x \in I, f(x) \leq g(x)]$. On a :

- 1) $\left(\int_I g(x) dx \text{ converge} \right) \Rightarrow \left(\int_I f(x) dx \text{ converge} \right)$
- 2) $\left(\int_I f(x) dx \text{ diverge} \right) \Rightarrow \left(\int_I g(x) dx \text{ diverge} \right)$

NB :

Si g est intégrable sur I alors f l'est aussi.

Proposition 3

Soient f et $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ CPM et **positives** ; où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Supposons que $f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} O(g(x))$. On a :

- 1) $\int_a^b g(x) dx \text{ converge} \implies \int_a^b f(x) dx \text{ converge}$
- 2) $\int_a^b f(x) dx \text{ diverge} \implies \int_a^b g(x) dx \text{ diverge}$

NB 1 :

La *proposition 3* vaut aussi si on remplace $f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} O(g(x))$ par $f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} o(g(x))$.

NB 2 :

La *proposition 3* est à adapter à l'intervalle $]a, b]$; où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Proposition 4

Soient f et $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ CPM et **positives** ; où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Supposons que $f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(x)$. On a :

- 1) $\int_a^b g(x) dx \text{ converge} \iff \int_a^b f(x) dx \text{ converge}$
- 2) Autrement dit :
 $\int_a^b f(x) dx$ et $\int_a^b g(x) dx$ sont de **même nature**.

NB 1 :

La *proposition 4* est à adapter à l'intervalle $]a, b]$; où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

NB 2 :

La *proposition 4* est valable aussi quand f est négative.

4) Propriétés relatives aux intégrales généralisées

Proposition 1 : (Linéarité)

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{K}$ CPM et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

- 1) Si les intégrales $\int_I f(x) dx$ et $\int_I g(x) dx$ convergent alors il en est de même pour l'intégrale $\int_I (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx$.

- 2) Le cas échéant, on a

$$\int_I (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_I f(x) dx + \beta \int_I g(x) dx$$

Proposition 3 : (Positivité-Croissance)

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ CPM. Supposons que $\int_I f(x) dx$ et $\int_I g(x) dx$ convergent.

- 1) $f \geq 0 \Rightarrow \int_I f(x) dx \geq 0$ (Positivité de l'intégrale généralisée)
- 2) $f \geq g \Rightarrow \int_I f(x) dx \geq \int_I g(x) dx$ (Croissance de l'intégrale généralisée)

Proposition 4 : (Intégrale nulle d'une fonction continue positive)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Si $\left(\begin{array}{l} 1) f \text{ est continue sur } I \\ 2) f \text{ est positive sur } I \\ 3) \int_I f(x) dx = 0 \end{array} \right)$ alors $(\forall x \in I, f(x) = 0)$

Proposition 5 : (Comparaison série-intégrale)

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ CPM, positive et décroissante. On a :

$$\sum_{n \geq 0} f(n) \text{ converge} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} f(x) dx \text{ converge}$$

Autrement dit : La série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ sont de même nature.

5) Propriétés des fonctions intégrables

Proposition 1 :

- 1) $(f \text{ intégrable}) \Leftrightarrow (|f| \text{ intégrable}) \Leftrightarrow (\bar{f} \text{ intégrable})$
- 2) Toute combinaison linéaire de fonctions intégrables est une fonction intégrable.
- 3) L'ensemble des fonctions intégrables, noté $L^1(I, \mathbb{K})$, est un \mathbb{K} -espace vectoriel.
- 4) L'application $f \mapsto \int_I f(x) dx$ est une forme linéaire de $L^1(I, \mathbb{K})$.

Proposition 2 :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ CPM.

f est intégrable si et seulement si $Re(f)$ et $Im(f)$ sont intégrables.

Proposition 3 :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ CPM.

- 1) Si $\int_I f(x) dx$ est ACV alors $\int_I f(x) dx$ est convergente.
- 2) Dans ce cas, on a l'inégalité triangulaire :

$$\left| \int_I f(x) dx \right| \leq \int_I |f(x)| dx$$

6) Fonctions de carré intégrable

Notation et vocabulaire :

1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ CPM. Si f^2 est intégrable sur I , on dit que f est de carré intégrable.
2. $L^2(I, \mathbb{K})$ désignera l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur I à valeurs dans \mathbb{K} .

Proposition 1 :

1. Le produit de deux fonctions de carré intégrable sur I est une fonction intégrable.
2. La combinaison linéaire de deux fonctions de carré intégrable sur I est une fonction de carré intégrable.
3. $L^2(I, \mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Proposition 2 : (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient $f, g \in L^2(I, \mathbb{R})$. On a

$$\left| \int_I f(x)g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_I f^2(x) dx} \times \sqrt{\int_I g^2(x) dx}$$

7) Intégration par parties

Proposition :

Soient $f, g \in \mathcal{C}^1([a, b[, \mathbb{K})$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

On suppose que $\lim_{x \rightarrow b} f(x)g(x)$ existe dans \mathbb{K} . Alors :

- 1) $\int_a^b f'(x)g(x) dx$ et $\int_a^b f(x)g'(x) dx$ sont de même nature.
- 2) En cas de convergence, on a

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

$$\text{où } [f(x)g(x)]_a^b = \lim_{x \rightarrow b} f(x)g(x) - f(a)g(a)$$

NB 1 :

La proposition vaut pour $]a, b]$:

On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ existe dans \mathbb{K} , et on conclut que :

- 1) $\int_a^b f'(x)g(x) dx$ et $\int_a^b f(x)g'(x) dx$ seront de même nature.
- 2) En cas de convergence, on aura :

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

$$\text{où } [f(x)g(x)]_a^b = f(b)g(b) - \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x).$$

NB 2 :

La proposition vaut aussi pour $]a, b[$:

On suppose que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x)g(x)$ existent dans \mathbb{K} . Et on conclut que :

- 1) $\int_a^b f'(x)g(x) dx$ et $\int_a^b f(x)g'(x) dx$ seront de même nature.
- 2) En cas de convergence, on aura :

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

$$\text{où } [f(x)g(x)]_a^b = \lim_{x \rightarrow b} f(x)g(x) - \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$$

8) Formule de changement de variable

Proposition :

Soient $a, b, \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ continue.

Soit $\Phi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$, de classe \mathcal{C}^1 , bijective et strictement croissante.

- 1) Les intégrales impropres $\int_a^b f(x) dx$ et $\int_\alpha^\beta f(\Phi(t)) \Phi'(t) dt$ sont de même nature.
- 2) En cas de convergence, on a l'égalité :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\Phi(t)) \Phi'(t) dt$$

Soient $a, b, \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ continue.

Soit $\Phi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$, de classe \mathcal{C}^1 , bijective et strictement décroissante.

- 1) Les intégrales impropres $\int_a^b f(x) dx$ et $\int_\alpha^\beta f(\Phi(t)) \Phi'(t) dt$ sont de même nature.
- 2) En cas de convergence, on a l'égalité :

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_\alpha^\beta f(\Phi(t)) \Phi'(t) dt$$

9) Intégration des relations de comparaison

Proposition 1 : (Comparaison de $\int_x^b f$ et $\int_x^b g$)

Soient $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ et $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ CPM avec g positive, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

- 1) Si $\begin{cases} f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} o(g(x)) \\ \int_a^b g \text{ converge} \end{cases}$ alors $\int_x^b f \underset{x \rightarrow b}{=} o\left(\int_x^b g\right)$
- 2) Si $\begin{cases} f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} O(g(x)) \\ \int_a^b g \text{ converge} \end{cases}$ alors $\int_x^b f \underset{x \rightarrow b}{=} O\left(\int_x^b g\right)$
- 3) Si $\begin{cases} f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(x) \\ \int_a^b g \text{ converge} \end{cases}$ alors $\int_x^b f \underset{x \rightarrow b}{\sim} \int_x^b g$

Proposition 2 :

Soient $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ et $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ CPM avec g positive, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

- 1) Si $\begin{cases} f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} o(g(x)) \\ \int_a^b g \text{ diverge} \end{cases}$ alors $\int_a^x f \underset{x \rightarrow b}{=} o\left(\int_a^x g\right)$
- 2) Si $\begin{cases} f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} O(g(x)) \\ \int_a^b g \text{ diverge} \end{cases}$ alors $\int_a^x f \underset{x \rightarrow b}{=} O\left(\int_a^x g\right)$
- 3) Si $\begin{cases} f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(x) \\ \int_a^b g \text{ diverge} \end{cases}$ alors $\int_a^x f \underset{x \rightarrow b}{\sim} \int_a^x g$

NB :

La Proposition 1 et la Proposition 2 sont à adapter au cas de l'intervalle $]a, b]$ où $x \rightarrow a$:

- 1) Dans la Proposition 1, on aura la comparaison de $\int_a^x f$ et $\int_a^x g$ quand $x \rightarrow a$.
- 2) Dans la Proposition 2, on aura la comparaison de $\int_x^b f$ et $\int_x^b g$ quand $x \rightarrow a$.

Fin

