SADIK Omar CPGE FES — Corrigé du concours Mines ponts 17 maths 2

A. Préliminaires sur les matrices symétriques

1) Supposons que $S \in S^{++}(\mathbb{R})$, et λ une valeur propre de S, alors $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $SX = \lambda X$, donc $X^T SX = \lambda X^T X$, or $X^T X = \|X\|^2$ cette norme dans $\mathbb{R}^n$, muni de sa structure euclidienne canonique.

Alors $\lambda = \dfrac{X^T SX}{X^T X} > 0$, le nombre $X^T X \neq 0$ car $X \neq 0$.

Supposons que $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$, soit $\lambda_1, \ldots.\lambda_n$ les valeurs propres de S qui est symétrique réelle donc orthogonalement diagonalisable, donc $\exists P$ orthogonale et $D = diag(\lambda_1, \ldots.\lambda_n)$ telle que $S = PDP^T$, alors pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $X^T SX = X^T PDP^T X = Y^T DY$, où $Y = P^T X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, donc $X^T SX = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2$ qui est positive, et si on suppose qu'il est nul, alors $\forall i,\ \ y_i = 0$ car les $\lambda_i > 0$, donc le vecteur Y et par suite X sont nuls car P est inversible, ce qui est absurde.

2) On peut poser $S = PDP^T = P\delta P^T P\delta P^T$ où $\delta = diag(\sqrt{\lambda_1}, \ldots.\sqrt{\lambda_n}))$.

La matrice $R = P\delta P^T = P\delta P^{-1}$ est symétrique et ses valeurs propres sont > 0, donc un élément de $S^{++}(\mathbb{R})$, et vérifie bien $S = R^T R$.

Réciproquement supposons que $S = R^T R$, alors pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, $X^T R^T RX = (RX)^T RX = \|RX\|^2$ qui est positive et ne peut pas être nul car $R \in S^{++}(\mathbb{R})$, donc inversible.

3) Soit $\lambda \in [0,1]$, et $A, B \in S^{++}(\mathbb{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, alors $\lambda A + (1-\lambda)B$ est symétrique réelle, et $X^T(\lambda A + (1-\lambda)B)X = \lambda X^T AX + (1-\lambda)X^T BX$ somme de deux quantités positives donc positive.

Supposons que $\lambda X^T AX + (1-\lambda)X^T BX = 0$ alors $\lambda X^T AX = 0 = (1-\lambda)X^T BX$, donc $\lambda = (1-\lambda) = 0$, absurde, donc $\lambda X^T AX + (1-\lambda)X^T BX > 0$ alors $S^{++}(\mathbb{R})$ est convexe.

B. Autres préliminaires

4) Soit $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1} \longrightarrow E,\ \ (\lambda_1, \ldots.\lambda_{n+1}; x_1, \ldots x_{n+1}) \longmapsto \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k$.On a bien $Conv(K) = \phi(\mathcal{H} \times K^{n+1})$.

L'application $f: \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\lambda_1, ...\lambda_{n+1}) \longmapsto \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k$ est multilinéaire et $\mathbb{R}^{n+1}$ est de dim fini, donc continue et $\mathcal{H} = f^{-1}\{1\} \bigcap \mathbb{R}_+^{n+1}$ est un fermé de $\mathbb{R}^{n+1}$

Si $(\lambda_1, ...\lambda_{n+1}) \in \mathcal{H}$, alors $\forall i;\ 0 \leq \lambda_i \leq 1$, donc $\|(\lambda_1, ...\lambda_{n+1})\|_\infty \leq 1$, alors $\mathcal{H}$ est un compact.

ϕ est une application multilinéaire et $\mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1}$ est de dim fini donc ϕ est continue.

L'image du compact $\mathcal{H} \times K^{n+1}$ par ϕ est un compact, alors $Conv(K)$ est un compact de E

5) $\langle e_1+e_i|e_1-e_i\rangle = \|e_1\|^2 - \|e_i\|^2 = 0$, donc $0 = \langle g(e_1+e_i)|g(e_1-e_i)\rangle = \left\|g(e_1)\right\|^2 - \left\|g(e_i)\right\|^2$, alors la famille $(g(e_1), ..., g(e_n))$ est orthogonale et tous ces vecteurs ont même norme $k = \left\|g(e_1)\right\| \geq 0$.

Posons $x = \sum_{k=1}^{n} x_i e_i$, alors par pythagore :

$\left\|g(x)\right\|^2 = \left\|g(\sum_{k=1}^{n} x_i e_i)\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_i^2 \left\|g(e_i)\right\|^2 = k^2 \sum_{k=1}^{n} x_i^2 = k^2 \|x\|^2$, donc $\left\|g(x)\right\| = k\|x\|$.

Si $k \neq 0$, posons $f = \frac{1}{k} g$, alors $\forall x \in E, \left\|f(x)\right\| = \|x\|$, donc f est un endomorphisme orthogonal.

Si $k = 0$, l'égalité $g = kf$ est encore vraie car $k = 0$ entraine $g = 0$.

6) $O_n(\mathbb{R})$ n'est pa vide car $I_n \in O_n(\mathbb{R})$, pour tout $M, N \in O_n(\mathbb{R})$, N est inversible donc $O_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $(MN^{-1})^T MN^{-1} = NM^{-1}MN^{-1} = I_n$. $O_n(\mathbb{R})$ est donc un sous groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

L'application $u: \quad M \longmapsto (M^T, M)$ est linéaire et la dim de $M_n(\mathbb{R})$ est fini donc u est continue.

L'application $v: \quad (M, N) \longmapsto MN$ est bilinéaire et la dim de $M_n(\mathbb{R})^2$ est fini donc v est continue.

Alors L'application $w: \quad M \longmapsto M^T M$ est linéaire continue, car $w = v \circ u$.

$O_n(\mathbb{R}) = w^{-1}\{I_n\}$ est donc un fermé.

Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$ alors $\mathrm{tr}(M^T M) = \|M\|^2 = n$, donc $O_n(\mathbb{R})$ est borné, alors $O_n(\mathbb{R})$ est un compact.

C. Quelques propriétés de la compacité

7) Supposons qu'elle existe une application $\varphi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante tell que $(x_{\varphi(n)})_n$ est convergente vers $\ell \in E$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\|x_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n+1)}\right\| \geq \varepsilon$, en faisant tendre n vers l'infini, on aura $0 \geq \varepsilon$, ce qui est absurde.

8) On raisonne par l'absurde. Soit $x_0 \in K$, on a K n'est pas inclus dans $B(x_0,\varepsilon)$, soit $a_1 \in K - B(x_0,\varepsilon)$, alors K n'est pas inclus dans $B(x_0,\varepsilon)\bigcup B(x_1,\varepsilon)$, il existe $x_2 \in K - B(x_0,\varepsilon)\bigcup B(x_1,\varepsilon)$, et ainsi de suite pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $a_n \in K - \bigcup\limits_{0\leq k\leq n-1} B(x_k,\varepsilon)$.

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de K qui est compact, qui vérifie $\forall i \neq j \in \mathbb{N},\ \left\|x_i - x_j\right\| > \varepsilon$.

D'après Bolzano-Weierstrass il existe une sous suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers $\ell \in K$. Ceci contredit la question $Q7$).

9) Supposons l'hypothèse (H) suivant : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_n \in K$, tel que $B(x_n, \dfrac{1}{n}) \not\subset \Omega_i$ pour tout $i \in I$.

La suite $(x_n)_n$ du compact K possède une valeur d'adhérence $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers $a \in K$, et $K \subset \bigcup\limits_{i\in I}\Omega_i$, donc ,$\exists j \in I$ tel que $a \in \Omega_j$ qui est ouvert de E, donc $\exists r > 0$ tel que $B(a,r) \subset \Omega_j$.

$\exists m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left\|x_{\varphi(m)} - a\right\| < \dfrac{r}{2}$ et $\dfrac{1}{m} < \dfrac{r}{2}$, car $x_{\varphi(n)}$ tend vers a.

Soit $x \in B\left(x_{\varphi(m)}, \dfrac{1}{\varphi(m)}\right)$, alors $\|x - a\| \leq \left\|x - x_{\varphi(m)}\right\| + \left\|x_{\varphi(m)} - a\right\| \leq \dfrac{1}{\varphi(m)} + \dfrac{r}{2} < r$, donc $B\left(x_{\varphi(m)}, \dfrac{1}{\varphi(m)}\right) \subset B(a,r)$

Donc $B\left(x_{\varphi(m)}, \dfrac{1}{\varphi(m)}\right) \subset \Omega_j$ et ceci est absurde avec l'hypothèse (H).

Pour ce α par application de la question 8), $\exists x_1,\dots,x_p \in K$ tels que $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{p} B(x_i,\alpha)$.

Pour chaque $i \in \{1,\dots,p\}$ $\exists i_k \in I$, tel que $B(x_i,\alpha) \subset \Omega_{i_k}$, alors $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{p}\Omega_{i_k}$.

10) $\bigcap\limits_{i\in I} F_i = \emptyset$ donc $E = \bigcup\limits_{i\in I} F_i^c$, alors $K \subset \bigcup\limits_{i\in I} F_i^c$, d'après la question précédente puisque les F_i^c sont des ouverts, $\exists J$ fini $\subset I$ tel que $K \subset \bigcup\limits_{i\in J} F_i^c$, donc $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \subset K^c$, or tous les $F_i \subset K$, donc $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \subset K$, alors $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \subset K \bigcap K^c = \emptyset$, donc $\bigcap\limits_{i\in I} F_i = \emptyset$.

D. Théorème du point fixe de Markov-Kakutani

11) Soit $x \in E$, l'application $\mathscr{L}(E) :\ u \longmapsto u(x)$ est continue car linéaire et $\dim\mathscr{L}(E)$ est fini, et $\|\|$ est continue, donc l'application $\mathscr{L}(E) :\ u \longmapsto \|u(x)\|$ est continue, G est un compact donc $\sup\limits_{u\in G}\|u(x)\|$ existe.

• Soit $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $N_G(x) = 0$ alors $\forall u \in G$, $u(x) = 0$, en particulier $u = Id \in G$ qui est sous groupe de $\mathrm{GL}(E)$, $x = 0$.

$N_G(\lambda x) = |\lambda| N_G(x)$ est évident

Soit $v \in G$, alors $\left\| v(x+y) \right\| \leq \| v(x) \| + \left\| v(y) \right\| \leq N_G(x) + N_G(y)$,

$N_G(x+y) \leq N_G(x) + N_G(y)$.

12) L'application $G \longrightarrow G; \quad v \longrightarrow v \circ u$ est une bijection donc $N_G(u(x)) = \sup\limits_{v \in G} \| v(u(x)) \| = \sup\limits_{w \in G} \| w(x) \| = N_G(x)$.

Supposons que $y = \lambda x$ avec $\lambda \geq 0$, alors $N_G(x) + N_G(y) = (1+\lambda) N_G(x) = N_G(x+y)$.

Supposons que $N_G(x) + N_G(y) = N_G(x+y)$.

L'application $x \longmapsto \| u(x) \|$ est continue, alors $\exists u \in G$ tel que $N_G(x+y) = \left\| u(x+y) \right\|$.

Donc $N_G(x+y) = \left\| u(x+y) \right\| = \left\| u(x) + u(y) \right\| = N_G(x) + N_G(y) \geq \| u(x) \| + \left\| u(y) \right\|$.

Alors $\| u(x) \| + \left\| u(y) \right\| \geq \left\| u(x+y) \right\| \geq \| u(x) \| + \left\| u(y) \right\|$

Donc ces trois quantités sont égaux, alors $\| u(x) \| + \left\| u(y) \right\| = \left\| u(x) + u(y) \right\|$, la norme $\| \|$ est euclidienne, donc les vecteurs de la famille $(u(x), u(y))$ sont positivement liées, donc il existe $\lambda \geq 0$ telle que $u(y) = \lambda u(x)$, u est un automorphisme donc $y = \lambda x$

13) K est stable par u et $x \in K$, donc $\forall i \in \mathbb{N}$; $u^i(x) \in K$.

K est convexe donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in K$ qui est compact donc on peut extraire $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers un $a \in K$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u(x_n) - x_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} u^{i+1}(x) - u^i(x) = \dfrac{1}{n}(u^n(x) - x)$, d'où l'inégalité demandée.

En écrivant $\forall n \in \mathbb{N}; \left\| u(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)} \right\| \leq \dfrac{\delta(K)}{\varphi(n)}$, en faisant tendre n vers l'infini on obtient $u(a) = a$.

14) Soit $x \in K$, alors $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$, $u_i(x) \in K$ et K est convexe donc $u(x) \in K$, donc $u(K) \subset K$ par application de la question $Q13)$, $\exists a \in K$ tel que $u(a) = a$.

15) On a $N_G\left(\dfrac{1}{r} \displaystyle\sum_{i=1}^{r} u_i(a) \right) = N_G(u(a)) = N_G(a) = \dfrac{1}{r} \displaystyle\sum_{i=1}^{r} N_G(a) = \dfrac{1}{r} \displaystyle\sum_{i=1}^{r} N_G(u_i(a))$ c'est la question 12.

On a par application de l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}
N_G(u_j(a)) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} N_G(u_i(a)) &= N_G(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} u_i(a)) \\
&\leq N_G(u_j(a)) + N_G(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} u_i(a))
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} N_G(u_i(a)) &\leq N_G(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} u_i(a)) \\
&\leq \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} N_G(u_i(a))
\end{aligned}$$

Donc $\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} N_G(u_i(a)) = N_G(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} u_i(a))$ et on ajoute aux deux membres de l'égalité $N_G(u_j(a))$, on obtient :

$N_G(u_j(a)) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} N_G(u_i(a)) = N_G(u_j(a)) + N_G(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} u_i(a))$, donc :

$N_G(u_j(a)) + N_G(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} u_i(a)) = \sum_{i=1}^{r} N_G(u_i(a)) = N_G(\sum_{i=1}^{r} u_i(a)) = N_G(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} u_i(a))$

16) Soit j entre 1 et r, si $u_j(a) = 0$, alors $a = 0$ donc $u(a) = 0$ et l'égalité est vraie.

Si non par application de $Q12$ et $Q15$, $\exists \lambda_j \geq 0$ tel que $\lambda_j u_j(a) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} u_i(a)$ et l'égalité demandé en découle.

17) Alors $a = \dfrac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a)$, donc $N_G(a) = \dfrac{\lambda_j + 1}{r} N_G(u_j(a)) = \dfrac{\lambda_j + 1}{r} N_G(a)$ c'est $Q12$).

Si $a = 0$ c'est un point fixe de tout le monde, si non, $\dfrac{\lambda_j + 1}{r} = 1$, donc $a = u_j(a)$.

18) Pour tout $u \in G$, posons $F_u = \mathrm{Ker}(u - Id_E) \cap K$ qui est un fermé inclus dans K. Supposons que $\bigcap_{u \in G} F_u = \emptyset$, par la question 10), $\exists u_1, \dots, u_r$ telle que $\bigcap_{i=1}^{r} F_{u_i} = \emptyset$.

d'après la question 17), il existe $a \in E$ fixe de tous les u_i, $1 \le i \le r$, donc $a \in \bigcap_{i=1}^{r} F_{u_i}$ et ceci est absurde.

Alors $\bigcap_{u \in G} F_u \neq \emptyset$, soit alors un élément de cette intersection donc c'est un point fixe de tous les éléments du groupe G.

E. Sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

19) ρ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ c'est simple.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} M \in \mathrm{Ker}(\rho_A) &\implies A^T M A = 0 \\ &\implies M = 0 \ \text{car} A \in G \ \text{donc inversible} \end{aligned}$$

Donc $\rho_A \in \mathrm{GL}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

$\rho_{I_n} = Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \in H$, soit $A; B \in H$, alors pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\rho_A \circ \rho_B(M) = \rho_A(B^T M B) = A^T B^T M B A = \rho_{BA}(M)$.

Donc $\rho_A \circ \rho_B = \rho_{BA} \in H$, et $(\rho_A)^{-1} = \rho_{A^{-1}} \in H$, donc H est un sous groupe de $\mathrm{GL}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, considérons les applications $d_A : M \longmapsto A^T M$, $g_A : M \longmapsto MA$, $\phi_1 : M \longmapsto (d_M, g_M)$ elles sont tous linéaires démarrant de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dim fini donc continues

L'application $\phi_2 : (d_M, g_M) \longmapsto d_M \circ g_M$ est bilinéaire donc continue pour les mêmes raisons.

Or $\rho_A = d_A \circ g_A = \phi_2 \circ \phi_1(A)$, donc l'application $\phi : A \longmapsto \rho_A$ est continue, car $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$.

On a $H = \phi(G)$, G est un compact de $\mathrm{GL}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ donc H aussi.

20) Les applications $u : M \longmapsto (M^T, M)$ et $v : (A, B) \longmapsto AB$ sont continues et $\Delta = v \circ u(G)$, donc Δ est un compact.

$\Delta \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$ de la question 2), donc $\mathrm{Conv}(\Delta) \subset \mathrm{Conv}(S_n^{++}(\mathbb{R}))$, et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un convexe ($Q3$) ; donc $\mathrm{Conv}(S_n^{++}(\mathbb{R})) = S_n^{++}(\mathbb{R})$, donc $K = \mathrm{Conv}(\Delta) \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Δ est un compact, par application de la question 4), $\mathrm{Conv}(\Delta) = K$ est un compact de $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Soit $A \in G$, et $M \in K$, donc M s'écrit sous forme $M = \sum_{i=1}^{n^2+1} \lambda_i B_i^T B_i$ les $B_i \in G$ et les $\lambda_i \ge 0$ de somme 1, alors $\rho_A(M) = \sum_{i=1}^{n^2+1} \lambda_i \rho_A(B_i^T B_i) = \sum_{i=1}^{n^2+1} \lambda_i A^T B_i^T B_i A =$

$\sum_{i=1}^{n^2+1} \lambda_i (B_i A)^T B_i A \in K$, car $B_i A \in G$ pour tout i.
Donc $\rho_A(K) \subset K$.

21) • K est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
H est un sous groupe compact de $\mathrm{GL}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Par application de la question 18) il existe $M \in K$ tel que $\forall A \in G, \rho_A(M) = M$, donc $\forall A \in G,\ A^T MA = M$.
• $M \in K$, et $K \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$ c'est $Q20)$; donc par la question 2), $\exists N$ inversible réelle telle que $M = N^T N$. Montrons que $\forall A \in G;\ NAN^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.
$(NAN^{-1})^T NAN^{-1} = (N^{-1})^T A^T \underbrace{N^T N} AN^{-1} = (N^{-1})^T \underbrace{A^T MA} N^{-1} = (N^{-1})^T MN^{-1} = (N^{-1})^T N^T NN^{-1} = I_n$, donc $\forall A \in G;\ NAN^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.
• L'application $\phi : G \longrightarrow O_n(\mathbb{R})$; $A \longmapsto NAN^{-1}$ est un morphisme de groupe, alors $\phi(G) = G_1$ est un sous groupe de $O_n(\mathbb{R})$, et on a bien $NGN^{-1} = G_1$.

22) $(g \circ \sigma_P \circ g^{-1})^2 = g \circ \sigma_P \circ g^{-1} \circ g \circ \sigma_P \circ g^{-1} = Id_{\mathbb{R}^n}$.
Soit Q la matrice de σ_P dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors la matrice de $g \circ \sigma_P \circ g^{-1}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est NQN^{-1}.
Or σ_P est un endomorphisme orthogonal, donc $Q \in O_n(\mathbb{R}) \subset K$, donc $NQN^{-1} \in NKN^{-1} \subset O_n(\mathbb{R})$, donc $g \circ \sigma_P \circ g^{-1}$ est un endomorphisme orthogonal, car sa matrice dans la base canonique qui est orthonormale est orthogonale.
$g \circ \sigma_P \circ g^{-1} \neq Id_{\mathbb{R}^n}$ car $\sigma_P \neq Id_{\mathbb{R}^n}$.
g est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$, donc transforme P en un espace de même dimension c'est à dire un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.
Soit $x \in P$ alors $g \circ \sigma_P \circ g^{-1}(g(x)) = g(x) = \sigma_{g(P)}(g(x))$, alors $g \circ \sigma_P \circ g^{-1} = \sigma_{g(P)}$ sur $g(P)$.
Dans une base adaptée à $g(P) \oplus g(P)^\perp = \mathbb{R}^n$, la matrice de $g \circ \sigma_P \circ g^{-1}$ est de la forme $\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, l'endomorphisme est orthogonal est différent de l'identité, donc $\alpha = -1$, alors $g \circ \sigma_P \circ g^{-1} = \sigma_{g(P)}$. Alors $g \circ \sigma_P = \sigma_{g(P)} \circ g$
Soit $x, y \in E$, alors :
$\langle g \circ \sigma_P(x) | g \circ \sigma_P(y)\rangle = \langle \sigma_{g(P)} \circ g(x) | \sigma_{g(P)} \circ g(y)\rangle = \langle g(x)|g(y)\rangle$ car $\sigma_{g(P)} \in O_n(\mathbb{R})$.
Soit $P = \mathrm{Vect}(x)^\perp$, et supposons que $x \perp y$, alors $x \in P^\perp$, donc $\sigma_P(x) = -x$ et $y \in P$, donc $\sigma_P(y) = y$, alors l'égalité précédente s'écrit, $\langle g(-x)|g(y)\rangle = \langle g(x)|g(y)\rangle$; g est linéaire donc $\langle g(x)|g(y)\rangle = 0$, donc g conserve l'orthogonalité.
g conserve l'orthogonalité alors, par application de la question 5) il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et f endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$ tel que $g = \alpha f$.

$\alpha \neq 0$, car $g \neq 0$, posons M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Donc $NKN^{-1} = MKM^{-1}$ le α se simplifie.
Donc $MKM^{-1} = NKN^{-1} \subset O_n(\mathbb{R})$, alors puisque $M \in O_n(\mathbb{R})$, donc $K \subset O_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R}) \subset K$, donc $K = O_n(\mathbb{R})$.

Pour vos remarques ... sadikoulmeki@gmail.com