Intégrales dépendant d'un paramètre

Convergence dominée

Exercice 1 [00921] [Correction]
Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

a) $u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, \mathrm{d}x$ b) $v_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n + \mathrm{e}^x}$

Exercice 2 [03800] [Correction]
Étudier la limite éventuelle, quand n tend vers $+\infty$, de la suite

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}} \, \mathrm{d}x$$

Exercice 3 [00746] [Correction]
Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

a) $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2} \, \mathrm{d}x$ b) $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n \, \mathrm{d}x}{x^{n+2}+1}$ c) $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n \, \mathrm{d}x}{x^{2n}+1}$

Exercice 4 [01771] [Correction]
Vérifier que la suite de terme général

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{nt+t^2} \, \mathrm{d}t$$

est bien définie et étudier sa convergence.

Exercice 5 [00926] [Correction]
Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin^n(t) \, \mathrm{d}t$$

Exercice 6 [00927] [Correction]
Établir que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$$

Exercice 7 [02568] [Correction]
Montrer que

$$u_n = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$$

est définie pour $n \geq 1$.
Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$$

En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 8 [03294] [Correction]
Montrer

$$\lim_{n\to+\infty} n \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n} \, \mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \, \mathrm{d}x$$

Exercice 9 [03807] [Correction]
Montrer que la fonction f_n donnée par

$$f_n(x) = \frac{\ln(1+x/n)}{x(1+x^2)}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Montrer que la suite de terme général $u_n = n\int_0^{+\infty} f_n(x) \, \mathrm{d}x$ converge vers une limite à préciser.

Exercice 10 [02567] [Correction]
Soit $f : [0\,;+\infty[\to \mathbb{C}$ continue.
On suppose que la fonction f converge en $+\infty$ vers une limite finie ℓ.
Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de

$$\mu_n = \frac{1}{n} \int_0^n f(t) \, \mathrm{d}t$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 11 [02435] [Correction]
Étudier la limite de

$$\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t$$

où $f\colon [0\,;1]\to\mathbb{R}$ est continue.

Exercice 12 [00150] [Correction]
Soit $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ bornée. On pose, pour $n\in\mathbb{N}$,

$$I_n=\int_0^{+\infty} nf(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

Déterminer la limite de I_n quand $n\to+\infty$.

Exercice 13 [00924] [Correction]
Soit $f\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ continue et bornée.
Déterminer la limite quand $n\to+\infty$ de

$$\int_0^{+\infty}\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 14 [03650] [Correction]
Soit $f\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable ainsi que sa dérivée.

a) Déterminer pour $x>0$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} n\cos t(\sin t)^n f(xt)\,\mathrm{d}t$$

b) Préciser le mode de convergence.

Exercice 15 [04079] [Correction]
Étudier

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\mathrm{d}t$$

Exercice 16 [00922] [Correction]
Étudier

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 17 [00923] [Correction]
Déterminer un équivalent de

$$\int_0^n\sqrt{1+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 18 [02982] [Correction]
Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n^2}\mathrm{d}x$$

Exercice 19 [00925] [Correction]
Soit $f\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ continue et intégrable.
Déterminer la limite quand $n\to+\infty$ de

$$n\int_0^1\frac{f(nt)}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 20 [02862] [Correction]
Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n!}{\prod_{k=1}^n(k+x)}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 21 [03159] [Correction]
Soit F une application continue décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, tendant vers 1 en $-\infty$ et vers 0 en $+\infty$. Soient deux réels h et δ vérifiant $0<h<\delta$.

a) Déterminer la limite éventuelle de

$$I_n=\int_0^1 F\left(\sqrt{n}(\delta t-h)\right)\mathrm{d}t$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

b) On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} F\left(\sqrt{n}\left(\delta\frac{k+1}{n} - h\right)\right)$$

Déterminer un équivalent de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 22 [03362] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0\,;1[$, on pose

$$f_n(x) = \frac{x^{2n+1}\ln x}{x^2-1}$$

a) Montrer que f_n est intégrable sur $]0\,;1[$. On pose

$$J_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

b) Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

c) Montrer que

$$J_n = \frac{1}{4}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$$

Exercice 23 [02392] [Correction]
Soit f une application réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,;b]$ avec $0 < a < 1 < b$ et $f(1) \neq 0$.
Soit (f_n) la suite de fonctions telle que

$$f_n(x) = \frac{f(x)}{1+x^n}$$

a) Déterminer la limite simple de (f_n).

b) Établir l'égalité suivante :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

c) Montrer que

$$\int_a^1 t^{n-1}f_n(t)\,\mathrm{d}t \sim \frac{\ln 2}{n}f(1)$$

Exercice 24 [02517] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{x^2}{2n^2}\right)^{2n^4}$$

Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors d'un segment $[a\,;b]$.
Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(0)$$

Exercice 25 [03013] [Correction]
Existence et calcul de

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$$

Indice : utiliser une suite de fonctions judicieuse.

Exercice 26 [04143] [Correction]
Soit $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(1) \neq 0$. Déterminer un équivalent quand n tend vers l'infini de

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration terme à terme

Exercice 27 [00928] [Correction]
Montrer

$$\int_0^{+\infty}\frac{t}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

Exercice 28 [03781] [Correction]
Prouver l'égalité

$$\int_0^1\frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 29 [00929] [Correction]
Établir que

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}$$

Exercice 30 [02864] [Correction]
Existence et calcul de

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Le résultat est à exprimer à l'aide de $\zeta(2)$.

Exercice 31 [00931] [Correction]

a) Établir

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

b) En déduire

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

c) Calculer cette somme sachant

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 32 [00930] [Correction]

a) Établir

$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

b) En déduire

$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

Cette valeur est appelée constante de Catalan, elle vaut approximativement $0,916$.

Exercice 33 [00940] [Correction]
Établir que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

Exercice 34 [02615] [Correction]
Pour $n, m \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n(m) = \int_0^1 x^n (\ln x)^m\,\mathrm{d}x$$

a) Calculer $I_n(n)$.

b) En déduire

$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$$

Exercice 35 [00932] [Correction]
Établir

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$$

Exercice 36 [02869] [Correction]
Montrer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n} = \int_0^1 t^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 37 [02570] [Correction]
Soient p et k 2 entiers naturels, non nul. Soit $f_{p,k} : x \mapsto x^p (\ln x)^k$.

a) Montrer que $f_{p,k}$ est intégrable sur $]0\,;1]$. Soit

$$K_{p,k} = \int_0^1 x^p (\ln x)^k\,\mathrm{d}x$$

b) Exprimer $K_{p,k}$ en fonction de $K_{p,k-1}$.

c) Exprimer $J_n = \int_0^1 (x \ln x)^n\,\mathrm{d}x$ en fonction de n.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

d) On pose $I = \int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x$. Montrer

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

Exercice 38 [00934] [Correction]
Établir que pour $p \geq 2$,

$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^p}{1-x} \, \mathrm{d}x = (-1)^p p! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$$

Exercice 39 [00933] [Correction]
Établir

$$\int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$$

Exercice 40 [03790] [Correction]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$f_n(x) = x^n(1-\sqrt{x})$$

a) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$$

b) En déduire la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+3)}$$

Exercice 41 [03268] [Correction]
Montrer

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{2\cos x} \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\pi}{(n!)^2}$$

Exercice 42 [00943] [Correction]
Calculer, pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{2+\mathrm{e}^{i\theta}} \, \mathrm{d}\theta$$

Exercice 43 [02439] [Correction]
Soient $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$ et $n \in \mathbb{Z}$. Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-a} \, \mathrm{d}t$$

Exercice 44 [03214] [Correction]
Montrer que

$$\forall a, b > 0, \int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-at}}{1-\mathrm{e}^{-bt}} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}$$

Exercice 45 [00935] [Correction]
Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de

$$\frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+\cos^2 x} \, \mathrm{d}x$$

Exercice 46 [00939] [Correction]
Soient $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$u_n(\alpha) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^\alpha (\cos t)^n \, \mathrm{d}t$$

a) Nature de la série de terme général $u_n(1)$.

b) Plus généralement, nature de la série de terme général $u_n(\alpha)$.

c) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\alpha)$ pour $\alpha = 2, 3$.

Exercice 47 [02807] [Correction]

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

a) Pour $(m,n)\in\mathbb{N}^2$, calculer

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m\,\mathrm{d}x$$

Pour $p\in\mathbb{Z}$, montrer l'existence de

$$S_p=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^p}{\binom{2n}{n}}$$

b) Calculer S_0 et S_{-1}.

c) Si $p\in\mathbb{N}$, proposer une méthode de calcul de S_p.

Exercice 48 [02641] [Correction]

n désigne un entier naturel non nul.

a) Justifier que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty}\frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

est définie.

b) Soit $a\geq 0$. Calculer

$$\int_0^a\frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty}\frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

puis de

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

c) Soit $a\geq 0$. Montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}$$

converge uniformément sur $[0\,;a]$, puis que

$$\int_0^a\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{n^2+a^2}$$

d) En exploitant une comparaison série-intégrale, déterminer

$$\lim_{a\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{n^2+a^2}$$

e) En déduire que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

est convergente et donner sa valeur.
Comparer avec le résultat obtenu en b). Qu'en conclure ?

Exercice 49 [02438] [Correction]

a) Démontrer la convergence de la série de terme général

$$a_n=\frac{n!}{n^n}$$

b) Comparer

$$a_n \text{ et } n\int_0^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

c) En déduire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=\int_0^{+\infty}\frac{t\mathrm{e}^{-t}}{(1-t\mathrm{e}^{-t})^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 50 [02445] [Correction]

On pose

$$I_n=\int_0^1\frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$$

pour tout entier $n>0$.

a) Trouver la limite ℓ de (I_n).

b) Donner un équivalent de $(\ell-I_n)$.

c) Justifier

$$\int_0^1\frac{\ln(1+y)}{y}\,\mathrm{d}y=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

d) Donner un développement asymptotique à trois termes de (I_n).

Exercice 51 [02612] [Correction]

a) Déterminer la limite ℓ quand $n \to +\infty$ de

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$$

b) Donner un équivalent de

$$I_n - \ell$$

c) Justifier

$$\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)}$$

d) En déduire un équivalent de

$$\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$$

et donner un développement asymptotique à trois termes de I_n.

Exercice 52 [02840] [Correction]

a) Si $(s,\lambda) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}$, quelle est la nature de la série de terme général

$$\frac{\lambda^n}{s(s+1)\dots(s+n)}$$

pour $n \geq 0$? À λ fixé, on note Δ_λ l'ensemble des $s > 0$ tels que la série converge, et on note $F_\lambda(s)$ la somme de cette série.

b) Calculer $\lim_{s \to \sup \Delta_\lambda} F_\lambda(s)$.

c) Donner un équivalent de $F_\lambda(s)$ quand $s \to \inf \Delta_\lambda$.

d) Si $n \geq 1$, calculer :

$$\int_0^1 (1-y)^{s-1} y^n\,\mathrm{d}y$$

e) En déduire une expression intégrale de $F_\lambda(s)$.

Exercice 53 [02866] [Correction]
Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t} \left(\sum_{p=n}^{+\infty} a_p \frac{t^p}{p!} \right) \mathrm{d}t$$

Exercice 54 [02870] [Correction]
Si $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Montrer

$$\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$$

Exercice 55 [00118] [Correction]
Soit, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} \sin x \right) \right]^n \mathrm{d}x$$

a) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

b) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 56 [03287] [Correction]
Donner la nature de la série de terme général

$$u_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \cos^{2n} t\,\mathrm{d}t$$

Exercice 57 [02583] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Ensemble de définition de

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^x)^n}$$

b) Montrer que si $x > 1$, $\sum I_n(x)$ diverge.

c) Calculer $I_n(2)$ pour $n \geq 1$.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 58 [03844] [Correction]
Donner la limite la suite (u_n) de terme général

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$$

Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

Exercice 59 [01102] [Correction]

a) Donner les limites éventuelles en $+\infty$ des suites de termes généraux

$$U_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n} \text{ et } V_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$$

b) Quelles sont les natures des séries

$$\sum_{n\geq 1} U_n \text{ et } \sum_{n\geq 1} V_n \,?$$

Exercice 60 [02360] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n l'application définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{2\,\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{e}^{nx}-1} & \text{si } x \in]0\,;+\infty[\\ \alpha & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Pour quelle valeurs de α la fonction f_n est-elle continue ?
Dans la suite, on prendra cette valeur de α.

b) Montrer que f_n est bornée.

c) Montrer que $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ existe pour $n \geq 2$.

d) Exprimer $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ comme la somme d'une série.

Exercice 61 [02609] [Correction]
Pour $n \geq 1$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$$

a) Déterminer la limite de la suite (I_n).

b) Établir que pour tout entier $n \geq 1$,

$$I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} I_n$$

c) Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel qu'il y ait convergence de la suite de terme général

$$u_n = \ln(n^\alpha I_n)$$

d) En déduire la convergence de la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} I_n$$

et exprimer sa somme à l'aide d'une intégrale.

Exercice 62 [04144] [Correction]

a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$I_k = \int_0^1 t^{k-1} \ln(t)\,\mathrm{d}t$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$$

Exprimer R_n à l'aide d'une intégrale.

c) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$$

Intégration terme à terme par les sommes partielles

Exercice 63 [00936] [Correction]
Montrer que, pour $a > 0$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 64 [00942] [Correction]
Pour tout $\alpha > 0$, établir que

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$$

Exercice 65 [02863] [Correction]

a) Établir pour $a, b > 0$ l'égalité

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$$

b) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

Exercice 66 [02437] [Correction]
Montrer

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Exercice 67 [02867] [Correction]
Soit (a_n) une suite croissante de réels > 0 telle que $a_n \to +\infty$.
Justifier

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{-a_n x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$$

Etude de fonctions concrètes

Exercice 68 [00534] [Correction]

a) Justifier que l'intégrale suivante est définie pour tout $x > 0$

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

b) Justifier la continuité de f sur son domaine de définition.

c) Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$.

d) Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$ et la limite de f en $+\infty$.

Exercice 69 [03658] [Correction]
On pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+tx}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que $F(x)$ est bien définie pour tout $x \geq 0$.

b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0\,;+\infty[$.

c) Calculer $F^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 70 [00538] [Correction]
Soit

$$F\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Montrer que F est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de limite nulle en $+\infty$ de l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x}$$

Exercice 71 [00537] [Correction]
Soit

$$f\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et solution de l'équation différentielle

$$y - y' = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

Exercice 72 [00532] [Correction]
Soit

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}t}{1+t^3}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

a) Calculer $g(0)$ en réalisant le changement de variable $t = 1/u$.

b) Étudier les variations de g sur son domaine de définition.

c) Étudier la limite de g en $+\infty$.

Exercice 73 [00531] [Correction]

Soit

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+x^3+t^3}$$

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+$.

b) À l'aide du changement de variable $u = 1/t$, calculer $f(0)$.

c) Montrer que f est continue et décroissante.

d) Déterminer $\lim_{+\infty} f$.

Exercice 74 [03313] [Correction]

Soit

$$f : x \mapsto \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

a) Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont f est solution.

c) Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

d) Exploiter l'équation différentielle précédente pour former ce développement.

Exercice 75 [00533] [Correction]

Soit

$$f : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que f est définie, continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Étudier les variations de f.

b) Déterminer les limites de f en 0^+ et $+\infty$.

c) Déterminer un équivalent de f en 0^+ et $+\infty$.

Exercice 76 [00536] [Correction]

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que f est définie et positive sur $]-1\,;+\infty[$.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et préciser sa monotonie.

c) Former une relation entre $f(x+2)$ et $f(x)$ pour tout $x > -1$.

d) On pose pour $x > 0$,

$$\varphi(x) = xf(x)f(x-1)$$

Montrer que

$$\forall x > 0, \varphi(x+1) = \varphi(x)$$

Calculer $\varphi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

e) Déterminer un équivalent à f en -1^+.

Exercice 77 [02878] [Correction]

a) Pour quels x de $\mathbb{R}$ l'intégrale

$$\int_0^{\pi/2} (\sin t)^x\,\mathrm{d}t$$

existe-t-elle ? Dans ce cas, soit $f(x)$ sa valeur.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son intervalle de définition.

c) Que dire de la fonction

$$x \mapsto (x+1)f(x)f(x+1)\,?$$

Exercice 78 [02880] [Correction]

Montrer que, pour tout x réel positif,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 79 [02875] [Correction]

Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z > -1\}$. Si $z \in \Omega$, on pose

$$f(z) = \int_0^1 \frac{t^z}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que f est définie et continue sur Ω.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

b) Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers -1.

c) Donner un équivalent de $f(z)$ quand $\mathrm{Re}(z) \to +\infty$.

Exercice 80 [02871] [Correction]
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$$

a) Définition de f.

b) Continuité et dérivabilité de f.

c) Écrire $f(1)$ comme somme de série.

Exercice 81 [02882] [Correction]
On pose, pour $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$ et trouver des équivalents simples de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 82 [03324] [Correction]
Pour $x > 0$, on pose

$$f(x) = \int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{x^2-t^2}}$$

a) Montrer que f est définie et continue.

b) Déterminer les limites de f en 0^+ et $+\infty$.

Exercice 83 [03621] [Correction]

a) Déterminer le domaine de définition de

$$f(x) = \int_1^x \frac{\cos^2 t}{t}\,\mathrm{d}t$$

b) Donner un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 84 [03760] [Correction]

a) Déterminer l'ensemble de définition de

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}}$$

b) Donner la limite de f en $x = 1$.

Exercice 85 [03736] [Correction]
On pose

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)}$$

a) Étudier l'ensemble de définition de f.

b) Donner un équivalent de f en 0.

c) Montrer que le graphe de f admet une symétrie d'axe $x = 1/2$.

d) Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.

e) Calculer la borne inférieure de f.
Énoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

Exercice 86 [02556] [Correction]
Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\ln t}{t+x}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

b) Calculer $F'(x)$ et en déduire l'expression de

$$G(x) = F(x) + F(1/x)$$

c) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\int_0^1 \frac{t-1}{t+1}\frac{\ln t}{t^2 + 2t\,\mathrm{ch}(\theta) + 1}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 87 [03887] [Correction]

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

a) Montrer la continuité de l'application définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$g(x)=\int_0^x \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

b) Préciser ses limites en 0 et $+\infty$.

Exercice 88 [03889] [Correction]
Soit

$$g\colon x\mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Montrons que g est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$-y'+y=\frac{1}{x}$$

Calcul de fonction intégrale

Exercice 89 [00545] [Correction]
On considère la fonction

$$g\colon x\in\,]-1\,;+\infty[\mapsto \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}t^x\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que la fonction g est bien définie.

b) Justifier que la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer $g'(x)$.

c) En déduire une expression de $g(x)$ à l'aide des fonctions usuelles

Exercice 90 [02874] [Correction]
Étudier

$$f\colon x\mapsto \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}t^x\,\mathrm{d}t$$

Exercice 91 [03888] [Correction]

a) Montrer que l'application $g\colon x\mapsto \int_0^1 \frac{t^x-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $]-1\,;+\infty[$.

b) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $g'(x)$.

c) En déduire une expression simple de $g(x)$ pour $x>-1$.

Exercice 92 [00546] [Correction]
Soit

$$F\colon x\mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

a) Justifier que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer $F'(x)$.

c) En déduire une expression simplifiée de $F(x)$.

Exercice 93 [02873] [Correction]
Pour tout x réel, on pose

$$f(x)=\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ et } g(x)=\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Existence et calcul de ces deux intégrales.

Exercice 94 [00553] [Correction]
Soit

$$F(x,y)=\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}-\mathrm{e}^{-yt}}{t}\,\mathrm{d}t \text{ avec } x,y>0$$

Pour $y>0$, montrer que $x\mapsto F(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$$

En déduire la valeur de $F(x,y)$.

Exercice 95 [02611] [Correction]
On pose

$$F(x)=\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}}{t}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

a) Quel est le domaine de définition réel I de la fonction F ?

b) Justifier que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

c) Exprimer $F(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 96 [03311] [Correction]
Soient a,b deux réels strictement positifs.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

a) Justifier l'existence pour tout $x \in \mathbb{R}$ de

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} \cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

b) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.

c) Exprimer $F(x)$

Exercice 97 [00548] [Correction]
On pose

$$z\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}x)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

et on donne $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}/2$.

a) Justifier et calculer $z(0)$.

b) Montrer que z est définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$z'(x) = \frac{-1}{2(x+i)} z(x)$$

c) En déduire l'expression de $z(x)$.

Exercice 98 [03655] [Correction]
En dérivant la fonction déterminer l'expression de la fonction

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{tx}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 99 [03656] [Correction]

a) Existence de

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \operatorname{ch}(2xt)\,\mathrm{d}t$$

b) Calculer $F(x)$ en introduisant une équation différentielle vérifiée par F.

c) Calculer $F(x)$ directement par une intégration terme à terme.

Exercice 100 [00555] [Correction]
Ensemble de définition, dérivée et valeur de

$$f\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 101 [03660] [Correction]
Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\cos^2(t) + x^2\sin^2(t)\right)\mathrm{d}t$$

a) Justifier que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

b) Calculer $F'(x)$ et en déduire un expression de $F(x)$.

Exercice 102 [02881] [Correction]
Existence et calcul de

$$\int_0^{2\pi} \frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 103 [00556] [Correction]
Soit

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(1+x\sin^2 t)\,\mathrm{d}t \text{ sur } [0\,;+\infty[$$

a) Justifier que F est bien définie et continue.

b) Étudier la dérivabilité sur $[0\,;+\infty[$ et donner l'expression de sa dérivée via le changement de variable $u = \tan t$.

c) Établir que

$$F(x) = \pi(\ln(1+\sqrt{1+x}) - \ln 2)$$

Exercice 104 [02876] [Correction]
Existence et calcul de

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 105 [00551] [Correction]
Soit

$$F(x)=\int_0^1 \frac{\ln(1+2t\cos x+t^2)}{t}\,\mathrm{d}t$$

a) Justifier que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;\pi/2]$

b) Calculer $F'(x)$ sur $[0\,;\pi/2]$

c) Donner la valeur de $F(0)$ puis celle de $F(x)$ sachant

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

Exercice 106 [00552] [Correction]
Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x>0$, on pose

$$I_n(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(x^2+t^2)^n}$$

a) Justifier l'existence de $I_n(x)$.

b) Calculer $I_1(x)$.

c) Justifier que $I_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer $I_n'(x)$.

d) Exprimer $I_n(x)$.

Exercice 107 [03323] [Correction]
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose

$$F(x)=\int_0^{+\infty}\exp\left(-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)\right)\mathrm{d}t$$

a) Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

c) Former une équation différentielle vérifiée par F sur $]0\,;+\infty[$.

d) En déduire une expression simple de F sur $\mathbb{R}$.

Exercice 108 [03619] [Correction]
Soit F la fonction définie par :

$$F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
On admet l'identité

$$\frac{x^2-1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}=\frac{x^2}{1+x^2t^2}-\frac{1}{1+t^2}$$

valable pour tout x et t dans $\mathbb{R}$

b) Déterminer l'expression de $F(x)$.

Etude théorique

Exercice 109 [00540] [Correction]
Soit f une application continue de $\mathbb{R}\times[a\,;b]$ dans $\mathbb{R}$.
Expliquer pourquoi f est uniformément continue sur $S\times[a\,;b]$ pour tout segment S de $\mathbb{R}$.
En déduire que $F\colon x\mapsto\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $g(x)=\int_0^1 \mathrm{e}^{xt}\,\mathrm{d}t$. À l'aide de la question précédente, étudier la continuité de g. Retrouver le résultat en calculant $g(x)$.

Exercice 110 [00544] [Correction]
Soient $f\colon I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $u,v\colon I\to\mathbb{R}$ continues.
Montrer la continuité de la fonction

$$x\mapsto\int_{u(x)}^{v(x)}f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 111 [03756] [Correction]
Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant $f(0)=0$.
Montrer que la fonction

$$g\colon x\mapsto\frac{f(x)}{x}$$

se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer ses dérivées successives en 0 en fonction de celles de f.

Exercice 112 [00294] [Correction]
Soient $f\colon I\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $a\in\mathbb{R}$ tels que

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(\alpha-1)}(a)=0$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

a) Montrer qu'on a pour tout $x \in I$

$$f(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} f^{(\alpha)}(t)\,\mathrm{d}t$$

b) En déduire qu'on peut écrire $f(x) = (x-a)^\alpha g(x)$ avec g de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Transformée de Fourier et intégrales apparentées

Exercice 113 [00547] [Correction]
On pose

$$z : x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}x)t^2}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que z est définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$z'(x) = \frac{-1}{2(x+i)} z(x)$$

b) En déduire l'expression de $z(x)$ sachant $z(0) = \sqrt{\pi}/2$.

Exercice 114 [00549] [Correction]
En dérivant la fonction déterminer l'expression de la fonction

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 115 [03211] [Correction]
On considère

$$\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer la définie et la continuité de φ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et montrer que

$$\varphi'(x) = \mathrm{i}\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

c) Montrer que pour $x > 0$,

$$\varphi'(x) = \mathrm{i}\int_0^{+\infty} \frac{u\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u$$

et déterminer un équivalent de $\varphi'(x)$ quand $x \to 0^+$.

d) La fonction φ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 116 [02499] [Correction]
On étudie

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

a) Donner le domaine de définition de f.

b) Calculer f en formant une équation différentielle.

c) Calculer f en exploitant le développement en série entière de la fonction cosinus.

Exercice 117 [00554] [Correction]
Existence et calcul de

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

sachant $g(0) = \sqrt{\pi}/2$.

Fonction d'Euler

Exercice 118 [00560] [Correction]
Démontrer que la fonction

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 119 [00561] [Correction]

a) Démontrer que la fonction Γ donnée par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

est définie et continue sur $]0\,;+\infty[$.

b) Démontrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

c) En exploitant l'inégalité de Cauchy Schwarz, établir que la fonction $x \mapsto \ln \Gamma(x)$ est convexe.

Exercice 120 [00562] [Correction]
L'objectif de cet exercice est de calculer

$$\int_0^{+\infty} \ln(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$$

a) Montrer que pour tout $t \in [0\,;n]$,

$$0 \leq \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} \leq \mathrm{e}.\, \mathrm{e}^{-t}$$

b) Établir que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \ln(t) \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \ln(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$$

c) Observer que

$$\int_0^n \ln(t) \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} \mathrm{d}t = \ln n + \int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u}\, \mathrm{d}u$$

d) Conclure que

$$\int_0^{+\infty} \ln(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t = -\gamma$$

où γ désigne la constante d'Euler.

Exercice 121 [02635] [Correction]
On rappelle $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Pour $x > 0$, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{d}t$$

a) Montrer que cette fonction est définie et indéfiniment dérivable sur $]0\,;+\infty[$. On étudiera la régularité en se restreignant à $x \in [a\,;b] \subset]0\,;+\infty[$.

b) Calculer $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

c) En réalisant le changement de variable $t = n + y\sqrt{n}$, transformer l'intégrale $\Gamma(n+1)$ en

$$\frac{n^n}{\mathrm{e}^n}\sqrt{n} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y)\, \mathrm{d}y$$

où $f_n(y) = 0$ pour $y \leq -\sqrt{x}$, $0 \leq f_n(y) \leq \mathrm{e}^{-y^2/2}$ pour $-\sqrt{t} < y \leq 0$ et $0 \leq f_n(y) \leq (1+y)\mathrm{e}^{-y}$ pour $y > 0$ et $t \geq 1$.

d) En appliquant le théorème de convergence dominée établir la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{\mathrm{e}^n}$$

Exercice 122 [02537] [Correction]

a) Donner le domaine de définition de la fonction

$$\Gamma\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$$

b) Calculer l'intégrale

$$I_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$$

c) Expliquer rapidement pourquoi $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$ converge vers e^{-t} et montrer que

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

Exercice 123 [00941] [Correction]
Établir que pour tout $x > 0$

$$\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$$

Applications au calcul d'intégrales

Exercice 124 [00535] [Correction]
Soit $f\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

a) Montrer que f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et exprimer $f'(x)$.

b) Calculer $f(0)$ et $\lim_{+\infty} f$.

c) On note g l'application définie par $g(x) = f(x^2)$. Montrer

$$g(x) + \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

d) Conclure

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exercice 125 [03654] [Correction]
L'objectif de ce sujet est de calculer

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Pour $x \geq 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}\,\mathrm{d}t$$

a) Justifier que la fonction F est bien définie

b) Déterminer une équation linéaire d'ordre 1 dont F est solution sur $]0\,;+\infty[$.

c) Calculer $F(0)$ et la limite de F en $+\infty$.

d) En déduire la valeur de I.

Exercice 126 [02638] [Correction]
On pose, pour $x \geq 0$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que F est continue sur $[0\,;+\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$.

b) Montrer que F est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et calculer $F''(x)$.

c) En déduire la valeur de $F(0)$ puis la valeur de l'intégrale convergente

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 127 [00542] [Correction]

a) Justifier la convergence de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

b) Pour tout $x \geq 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Déterminer la limite de F en $+\infty$.

c) Justifier que F est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et calculer F'

d) En admettant la continuité de F en 0 déterminer la valeur de I.

Exercice 128 [00543] [Correction]
Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $t \geq 0$, on pose $f(x,t) = \mathrm{e}^{-xt}\operatorname{sinc} t$ où sinc (lire sinus cardinal) est la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ prolongée par continuité en 0.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que $u_n(x) = (-1)^n \int_0^{\pi} g_n(x,u)\,\mathrm{d}u$ avec $g_n(x,u)$ qu'on explicitera.

b) Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

c) On pose $U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. Justifier que U est continue et expliciter U sous la forme d'une intégrale convergente.

d) Montrer que U est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ et calculer $U'(x)$.

e) Expliciter $U(x)$ pour $x > 0$ puis la valeur de

$$U(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 129 [02872] [Correction]
Pour $x \in \mathbb{R}_+$, soit

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

a) Justifier la définition de $f(x)$.
b) Montrer que f est classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
c) Calculer $f(x)$ si $x \in \mathbb{R}_+^*$.
d) Montrer que f est continue en 0. Qu'en déduit-on ?

Exercice 130 [00541] [Correction]
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \text{ et } g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elles vérifient l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x}$$

b) Montrer que f et g sont continues en 0
c) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 131 [00550] [Correction]
Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
b) Déterminer l'expression de $F(x)$.
c) Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 132 [03312] [Correction]

a) Montrer que pour tout $x > -1$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln 2}{2}\arctan x + \frac{\pi}{8}\ln(1+x^2) - \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

b) En déduire la valeur de

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
À chaque fois, on vérifie que les fonctions engagées sont continues par morceaux.

a) Sur $[0\,;\pi/4[$, $\tan^n x \xrightarrow{CVS} 0$ $|\tan^n x| \leq 1 = \varphi(x)$ intégrable sur $[0\,;\pi/4[$ donc

$$u_n \to \int_0^{\pi/4} 0\,\mathrm{d}x = 0$$

b) Sur $[0\,;+\infty[$, $\frac{1}{x^n+\mathrm{e}^x} \xrightarrow{CVS} f(x)$ avec $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ sur $[0\,;1[$ et $f(x) = 0$ sur $]1\,;+\infty[$.
De plus $\left|\frac{1}{x^n+\mathrm{e}^x}\right| \leq \mathrm{e}^{-x} = \varphi(x)$ avec φ intégrable sur $[0\,;+\infty[$ donc

$$v_n \to \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$$

Exercice 2 : [énoncé]
En découpant l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{n+2}}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}}\,\mathrm{d}x$$

En appliquant le théorème de convergence dominée aux deux intégrales, on obtient

$$I_n \to \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1$$

Exercice 3 : [énoncé]
À chaque fois, on vérifie que les fonctions engagées sont continues par morceaux.

a) Ici, on ne peut appliquer le théorème de convergence dominée sur $[0\,;+\infty[$ après une majoration de $|\sin x|$ par 1 car la fonction dominante $\varphi(x) = 1/x^2$ ne sera pas intégrable sur $]0\,;+\infty[$. Pour contourner cette difficulté, on découpe l'intégrale.

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

On a

$$\left|\int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 \left|\sin^{n-2}(x)\right|\mathrm{d}x \text{ car } |\sin x| \leq |x|$$

Sans difficultés, par le théorème de convergence dominée

$$\int_0^1 \left|\sin^{n-2}(x)\right|\mathrm{d}x \to 0$$

et donc

$$\int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x \to 0$$

Aussi

$$\left|\int_1^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|^n}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Or $\frac{|\sin x|^n}{x^2} \xrightarrow{CS} f(x)$ avec $f(x) = 0$ pour tout $x \neq \pi/2$ $[\pi]$.
De plus $\frac{|\sin x|^n}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} = \varphi(x)$ avec φ intégrable sur $[1\,;+\infty[$ donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|^n}{x^2}\,\mathrm{d}x \to \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

puis $u_n \to 0$.

b) On écrit

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{n+2}+1} + \int_1^{+\infty} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{n+2}+1}$$

On a

$$\left|\int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{n+2}+1}\right| \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$$

et

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{n+2}+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1$$

en vertu du théorème de convergence dominée et via la domination $\left|\frac{x^n}{x^{n+2}+1}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ sur $[1\,;+\infty[$.
Ainsi $u_n \to 1$.

c) On écrit

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{2n}+1} + \int_1^{+\infty} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{2n}+1}$$

On a

$$\left|\int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{2n}+1}\right| \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$$

et

$$\left|\int_1^{+\infty} \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{x^{2n}+1}\right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n} = \frac{1}{n-1}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

donc $u_n \to 0$.
On peut aussi appliquer le théorème de convergence dominée mais c'est moins efficace.

Exercice 4 : [énoncé]
Posons

$$f_n : t \mapsto \frac{\sin(nt)}{nt+t^2}$$

La fonction f_n est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
Quand $t \to 0^+$, $f_n(t) \sim \frac{nt}{nt+t^2} \to 1$.
Quand $t \to +\infty$; $f_n(t) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
On peut donc affirmer que f_n est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
Pour $t \in]0\,;+\infty[$.
Quand $n \to +\infty$, $f_n(t) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
De plus, pour $t \leq \pi/2$, on a, sachant $|\sin u| \leq |u|$,

$$|f_n(t)| \leq \frac{nt}{nt+t^2} \leq 1$$

et pour $t \geq \pi/2$,

$$|f_n(t)| \leq \frac{1}{nt+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$$

Ainsi $|f_n| \leq \varphi$ avec

$$\varphi : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0\,;\pi/2] \\ 1/t^2 & \text{si } t \in]\pi/2\,;+\infty[\end{cases}$$

La fonction φ étant intégrable sur $]0\,;+\infty[$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et affirmer

$$u_n \to \int_0^{+\infty} 0 \,\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 5 : [énoncé]
La fonction intégrée ne converge pas simplement en les $t = \pi/2 + \pi \mod 2\pi$. Pour contourner cette difficulté on raisonne à l'aide de valeurs absolues.

$$\left| \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin^n(t) \,\mathrm{d}t \right| \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \left|\sin^n t\right| \mathrm{d}t$$

On a

$$f_n(t) = \left|\mathrm{e}^{-t} \sin^n(t)\right| \xrightarrow{CS} f(t)$$

avec

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq \pi/2 \mod \pi \\ \mathrm{e}^{-t} & \text{sinon} \end{cases}$$

Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux et

$$|f_n(t)| \leq \mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux intégrable sur $[0\,;+\infty[$ donc par convergence dominée :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin^n(t) \,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t) \,\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 6 : [énoncé]
Les fonctions données par

$$f_n(t) = \left(1 + t^2/n\right)^{-n}$$

sont définies et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$.
La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f avec $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$ définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé et considérons

$$\varphi : x \mapsto -x \ln(1 + t^2/x)$$

définie sur $[1\,;+\infty[$.
En étudiant le signe de φ'', on démontre φ' est croissante. Or $\lim_{+\infty} \varphi' = 0$ et donc φ' est négative.
La fonction φ est donc décroissante et par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$|f_n(t)| \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} = \exp(\varphi(n)) \leq \exp(\varphi(1)) = \frac{1}{1+t^2}$$

La fonction $t \mapsto 1/(1+t^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Par convergence dominée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \,\mathrm{d}t$$

Exercice 7 : [énoncé]
La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^3)^n}$ est continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$ et on observe

$$\frac{1}{(1+t^3)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3n}}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

avec $3n > 1$ donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$ est bien définie pour $n \geq 1$.
Par application du théorème de convergence dominée (en prenant $\varphi(t) = \frac{1}{1+t^3}$ pour dominatrice), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n} = 0$$

La décroissance de $(|u_n|)$ et la positivité de l'intégrale étant des propriétés immédiates, on peut appliquer le critère spécial et affirmer que $\sum u_n$ converge.

Exercice 8 : [énoncé]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^n}$ est définie et continue par morceaux sur $[1\,;+\infty[$. Étant de plus négligeable devant $1/x^2$ quand $x \to +\infty$, on peut affirmer qu'elle est intégrable et on peut donc introduire

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x$$

Par le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement monotone donné par la relation $t = x^n$, on obtient

$$n\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} t^{1/n}\,\mathrm{d}t$$

Posons alors

$$f_n : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} t^{1/n}$$

Les fonctions f_n sont définies et continues par morceaux sur $[1\,;+\infty[$.
La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction

$$f : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(t)| \leq \mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$$

avec φ fonction continue par morceaux et intégrable puisque $t^2\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée et affirmer

$$n\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} t^{1/n}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 9 : [énoncé]
f_n est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
Quand $x \to 0^+$, $f_n(x) \to \frac{1}{n}$, on peut donc la prolonger par continuité.
Quand $x \to +\infty$, $f_n(x) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
Par suite f_n est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{n\ln(1+x/n)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

Posons

$$g_n(x) = \frac{n\ln(1+x/n)}{x(1+x^2)} = nf_n(x)$$

Pour $x > 0$, quand $n \to +\infty$, $g_n(x) \to \frac{1}{1+x^2}$.
De plus, sachant $\ln(1+u) \leq u$, on a $|g_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2} = \varphi(x)$ avec φ intégrable.
Par convergence dominée,

$$u_n \to \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 10 : [énoncé]
Par changement de variable

$$\mu_n = \int_0^1 f(ns)\,\mathrm{d}s$$

Par convergence dominée

$$\mu_n \to \ell$$

Exercice 11 : [énoncé]
Considérons la suite des fonctions $u_n : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ déterminée par $u_n(t) = f(t^n)$.
Les fonctions u_n sont continues par morceaux et par continuité de f

$$u_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u(t) \underset{\text{déf}}{=} \begin{cases} f(0) & \text{si } t \in [0\,;1[\\ f(1) & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

La suite de fonctions (u_n) converge simplement sur $[0\,;1]$ vers la fonction u continue par morceaux.
Enfin, la fonction f étant continue sur un segment, elle y bornée ce qui permet d'introduire

$$M = \sup_{t\in[0;1]} |f(t)|$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Puisque

$$\forall t \in [0\,;1], |u_n(t)| \leq M$$

avec $t \mapsto M$ intégrable sur $[0\,;1]$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et affirmer

$$\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t \to \int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$$

Exercice 12 : [énoncé]
Par le changement de variable $u = nt$

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(u/n)\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$

Par convergence dominée, sachant

$$|f(u/n)| \leq \|f\|_\infty\,\mathrm{e}^{-u} = \varphi(u)$$

avec φ intégrable, on obtient

$$I_n \to \int_0^{+\infty} f(0)\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = f(0)$$

Exercice 13 : [énoncé]
Par le changement de variable $u = nx$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{f(u/n)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

Posons alors $f_n : u \mapsto \frac{f(u/n)}{1+u^2}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.
La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers

$$f_\infty : u \mapsto \frac{f(0)}{1+u^2}$$

Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

$$|f_n(u)| \leq \frac{\|f\|_\infty}{1+u^2} = \varphi(u)$$

avec φ intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Par convergence dominée,

$$\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi f(0)}{2}$$

Exercice 14 : [énoncé]

a) Pour $x > 0$, posons

$$u_n(x) = \int_0^{+\infty} n\cos t(\sin t)^n f(xt)\,\mathrm{d}t$$

L'intégrabilité de f assure que $u_n(x)$ est bien définie.
Puisque f' est intégrable, la fonction f converge en $+\infty$ et, puisque f est aussi intégrable, f tend vers 0 en $+\infty$. Par intégration par parties, on obtient alors

$$u_n(x) = -\frac{n}{n+1}\int_0^{+\infty} (\sin t)^{n+1} x f'(xt)\,\mathrm{d}t$$

Posons $g_n(x) = |\sin t|^{n+1}\, x f'(xt)\,\mathrm{d}t$.
Chaque fonction g_n est continue par morceaux.
La suite de fonctions (g_n) converge simplement vers une fonction continue par morceaux, nulle en chaque $x \neq \pi/2 + k\pi$.
La fonction limite simple est continue par morceaux.
Enfin on a la domination

$$|g_n(x)| \leq xf'(xt) = \varphi(t)$$

avec la fonction φ intégrable.
Par convergence dominée

$$\int_0^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et par comparaison

$$u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

b) On vient déjà d'obtenir une convergence simple de la suite de fonctions (u_n) vers la fonction nulle. Montrons qu'en fait il s'agit d'une convergence uniforme.
Par changement de variable

$$u_n(x) = -\frac{n}{n+1}\int_0^{+\infty} (\sin(u/x))^{n+1} f'(u)\,\mathrm{d}u$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la fonction f' est intégrable, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\int_A^{+\infty} |f'(u)|\,\mathrm{d}u \leq \varepsilon$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

et alors

$$|u_n(x)| \leq M \int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1}\,\mathrm{d}u + \varepsilon \text{ avec } M = \max_{u\in[0;A]} |f'(u)|$$

Pour $x \geq 4A/\pi$, on a

$$\forall u \in [0\,;A], 0 \leq \frac{u}{x} \leq \frac{A}{x} \leq \frac{\pi}{4}$$

et donc

$$\int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1}\,\mathrm{d}u \leq \frac{A}{\sqrt{2}^{n+1}}$$

Pour $x \leq 4A/\pi$, on a par changement de variable

$$\int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1}\,\mathrm{d}u = x\int_0^{A/x} |\sin t|^{n+1}\,\mathrm{d}t$$

Pour k entier tel que $k\pi < A/x \leq (k+1)\pi$.

$$\int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1}\,\mathrm{d}u \leq x\int_0^{(k+1)\pi} |\sin t|^{n+1}\,\mathrm{d}t = x(k+1)\int_0^{\pi} (\sin t)^{n+1}\,\mathrm{d}t$$

Or $x(k+1)\pi \leq A + x\pi \leq 5A$ et donc

$$\int_0^A |\sin(u/x)|^{n+1}\,\mathrm{d}u \leq \frac{5A}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin t)^{n+1}\,\mathrm{d}t$$

Finalement, pour tout $x > 0$,

$$|u_n(x)| \leq \frac{5AM}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin t)^{n+1}\,\mathrm{d}t + \frac{AM}{\sqrt{2}^{n+1}} + \varepsilon$$

et donc pour n assez grand, on a pour tout $x > 0$.

$$|u_n(x)| \leq 2\varepsilon$$

Il y a donc convergence uniforme vers la fonction nulle.

Exercice 15 : [énoncé]
Posons

$$f_n(t) = \begin{cases} (1-t^2/n)^n & \text{si } t \in [0\,;\sqrt{n}[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $t \in [0\,;+\infty[$, à partir d'un certain rang $t > \sqrt{n}$ et

$$f_n(t) = \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right)\right) \to \mathrm{e}^{-t^2}$$

Ainsi, la suite (f_n) converge simplement vers $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$.
En vertu de l'inégalité $\ln(1+u) \leq u$, on obtient

$$|f_n(t)| \leq \mathrm{e}^{-t^2} = \varphi(t)$$

et ce que $t \in [0\,;\sqrt{n}]$ ou non.
La fonction φ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Par application du théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 16 : [énoncé]
Posons

$$f_n(x) = \begin{cases} (1+x/n)^n & \text{si } x \in [0\,;n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $x \in [0\,;+\infty[$, à partir d'un certain rang $x \geq n$ et

$$f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x} = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - 2x\right) \to \mathrm{e}^{-x}$$

Ainsi, la suite (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.
En vertu de l'inégalité $\ln(1+u) \leq u$, on obtient

$$|f_n(x)| \leq \mathrm{e}^{-x} = \varphi(x)$$

et ce que $x \in [0\,;n]$ ou non.
La fonction φ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Par application du théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$$

Exercice 17 : [énoncé]
Par changement de variable

$$\int_0^n \sqrt{1+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x \underset{u=1-x/n}{=} n\int_0^1 \sqrt{1-u^n}\,\mathrm{d}u$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Par le théorème de convergence dominée

$$\int_0^1 \sqrt{1-u^n}\,\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

donc

$$\int_0^n \sqrt{1+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x \sim n$$

Exercice 18 : [énoncé]

Posons $f_n(x) = \left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n^2}$ si $x \in [0\,;n]$ et $f_n(x) = 0$ si $x \in]n\,;+\infty[$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+$, quand $n \to +\infty$,

$$f_n(x) = \left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n^2} = \exp\left(n^2 \ln\left(1 - x^2/2n^2 + \mathrm{o}(1/n^2)\right)\right) \to \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

Ainsi, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2/2}$ sur $[0\,;+\infty[$. Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux.
Soit $\psi : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par $\psi(t) = 1 - t^2/4 - \cos t$. Par étude des variations,

$$\forall x \in [0\,;1], \psi(x) \geq 0$$

On en déduit que, pour $x \in [0\,;n]$,

$$\ln\left(\cos\frac{x}{n}\right) \leq \ln\left(1 - \frac{x^2}{4n^2}\right) \leq -\frac{x^2}{4n^2}$$

puis

$$f_n(x) \leq \mathrm{e}^{-x^2/4}$$

Cette inégalité vaut aussi pour $x \in]n\,;+\infty[$ et puisque la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2/4}$ est intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour affirmer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n^2} \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Exercice 19 : [énoncé]

On a

$$n\int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t}\,\mathrm{d}t \underset{u=nt}{=} \int_0^n \frac{f(u)}{1+u/n}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u$$

avec

$$f_n(u) = \begin{cases} \frac{f(u)}{1+u/n} & \text{si } u \in [0\,;n] \\ 0 & \text{si } u \in]n\,;+\infty[\end{cases}$$

La suite de fonctions continues (f_n) converge simplement vers la fonction continue f et $|f_n| \leq |f| = \varphi$ avec φ continue par morceaux intégrable sur $[0\,;+\infty[$ indépendant de n.
Par convergence dominée

$$\int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(u)\,\mathrm{d}u$$

Exercice 20 : [énoncé]

On a

$$\left|\frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)}\right| \leq \frac{1\times 2}{(x+1)(x+2)} \times 1 = \varphi(x)$$

avec φ intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Quand $n \to +\infty$,

$$\ln\left(\frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)}\right) = -\sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{x}{k}\right) \to -\infty$$

car $\ln(1+x/k) \sim x/k$ terme général d'une série à termes positifs divergente.
Par suite

$$\frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)} \to 0$$

puis par le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k+x)}\,\mathrm{d}x = 0$$

Exercice 21 : [énoncé]

a) Appliquons le théorème de convergence dominée.
Posons $f_n : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(t) = F\left(\sqrt{n}(\delta t - h)\right)$$

Pour $t \in [0\,;h/\delta[$, on a $f_n(t) \to 1$.
Pour $t \in]h/\delta\,;1]$, on a $f_n(t) \to 0$.
Enfin, pour $t = h/\delta$, $f_n(t) = F(0) \to F(0)$.
Ainsi la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0\,;1]$ vers f définie par

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0\,;h/\delta[\\ F(0) & \text{si } t = h/\delta \\ 0 & \text{si } t \in]h/\delta\,;1] \end{cases}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Les fonctions f_n sont continues et la limite simple f est continue par morceaux.
Enfin

$$\forall t \in [0\,;1], |f_n(t)| \leq 1 = \varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux et intégrable.
Par convergence dominée,

$$I_n \to \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{h/\delta} 1\,\mathrm{d}t = \frac{h}{\delta}$$

b) Par la décroissance de F, on peut écrire

$$\int_{(k+1)/n}^{(k+2)/n} F\left(\sqrt{n}(\delta t - h)\right)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n} F\left(\sqrt{n}\left(\delta\frac{k+1}{n} - h\right)\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} F\left(\sqrt{n}(\delta t - h)\right)\mathrm{d}t$$

En sommant ces inégalités

$$\int_{1/n}^{(n+1)/n} F\left(\sqrt{n}(\delta t - h)\right)\mathrm{d}t \leq \frac{S_n}{n} \leq I_n$$

et

$$\int_{1/n}^{(n+1)/n} F\left(\sqrt{n}(\delta t - h)\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 F\left(\sqrt{n}(\delta(t+1/n) - h)\right)\mathrm{d}t$$

Par convergence dominée, on obtient de façon analogue à ce qui précède, la limite de ce terme et on conclut

$$S_n \sim \frac{h}{\delta} n$$

Exercice 22 : [énoncé]

a) Considérons la fonction

$$\varphi\colon x \mapsto \frac{x\ln x}{x^2-1}$$

La fonction φ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;1[$.
Quand $x \to 0^+$, $\varphi(x) \to 0$ et quand $x \to 1^-$,

$$\varphi(x) = \frac{x}{x+1}\frac{\ln x}{x-1} \to \frac{1}{2}$$

Puisque φ se prolonge par continuité en 0 et en 1, φ est intégrable sur $]0\,;1[$.
Or

$$|f_n(x)| = x^{2n}\,|\varphi(x)| \leq |\varphi(x)|$$

donc, par domination, la fonction f_n est elle aussi intégrable sur $]0\,;1[$.

b) La suite de fonctions f_n converge simplement vers la fonction nulle et est dominée par la fonction intégrable φ donc par convergence dominée

$$J_n \to 0$$

c) On a

$$J_k - J_{k+1} = -\int_0^1 x^{2k+1}\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Réalisons une intégration par parties

$$-\int_\varepsilon^a x^{2k+1}\ln(x)\,\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^{2k+2}}{2k+2}\ln x\right]_\varepsilon^a + \int_\varepsilon^a x^{2k+1}\,\mathrm{d}x$$

Quand $\varepsilon \to 0^+$ et $a \to 1^-$, on obtient

$$J_k - J_{k+1} = \frac{1}{(2k+2)^2}$$

et donc

$$J_n = \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}(J_k - J_{k+1}) = \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{(2k+2)^2}$$

Enfin par translation d'indice

$$J_n = \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{(2k+2)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$$

Exercice 23 : [énoncé]

a) (f_n) converge simplement vers la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a\,;1[\\ f(1)/2 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \in]1\,;b] \end{cases}$$

b) Sachant $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ avec f intégrable sur $[a\,;b]$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient directement le résultat proposé.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

c) Par une intégration par parties

$$\int_a^1 t^{n-1}f_n(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{n}\ln(1+t^n)f(t)\right]_a^1 - \frac{1}{n}\int_a^1 \ln(1+t^n)f'(t)\,\mathrm{d}t$$

D'une part

$$\left[\frac{1}{n}\ln(1+t^n)f(t)\right]_a^1 = \frac{\ln 2}{n}f(1) + \frac{\ln(1+a^n)}{n}f(a) = \frac{\ln 2}{n}f(1) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

car $\ln(1+a^n)\to 0$.
D'autre part

$$\left|\frac{1}{n}\int_a^1 \ln(1+t^n)f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{n}\|f'\|_\infty \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

sachant $\ln(1+u)\leq u$.
Au final, on obtient

$$\int_a^1 t^{n-1}f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\ln 2}{n}f(1) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 24 : [énoncé]
L'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

est bien définie.
Par le changement de variable $x=u/n$ bijectif de classe $\mathcal{C}^1$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{na}^{nb} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{u^2}{2n^4}\right)^{2n^4} g(u/n)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(u)\,\mathrm{d}u$$

avec

$$h_n(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{u^2}{2n^4}\right)^{2n^4} g(u/n)\chi_{[na;nb]}$$

h_n est continue par morceaux, (h_n) converge simplement vers h continue par morceaux avec

$$h(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-u^2}g(0)$$

Pour n assez grand de sorte que $|a/n|, |b/n| \leq 1$ on a pour tout $u\in[na\,;nb]$, $\left|u^2/2n^4\right|\leq 1/2<1$,

$$|h_n(u)| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{2n^4\ln(1-u^2/2n^4)} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-u^2} = \varphi(u)$$

et cette inégalité vaut aussi pour $u\notin[na\,;nb]$.
La fonction φ étant continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et conclure sachant

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$$

Exercice 25 : [énoncé]
L'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$ est définie car la fonction $t\mapsto \ln(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue et intégrable sur $]0\,;+\infty[$ puisque

$$\sqrt{t}\ln(t)\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0 \text{ et } t^2\ln(t)\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, e^{-t} est la limite de

$$u_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\chi_{[0;n]}(t)$$

Le $n-1$ de l'exposant n'est pas usuel et peut très bien être remplacé par un n. Néanmoins pour alléger les calculs à venir, le $n-1$ est préférable...
On a

$$\ln(t)u_n(t)\to\ln(t)\mathrm{e}^{-t}$$

et

$$|\ln(t)u_n(t)|\leq \mathrm{e}\ln(t)\mathrm{e}^{-t}$$

donc par convergence domine

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\ln(t)\,\mathrm{d}t$$

On a

$$\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\ln(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 n\,(1-u)^{n-1}\ln(nu)\,\mathrm{d}u$$

avec

$$\int_0^1 n\,(1-u)^{n-1}\ln(nu)\,\mathrm{d}u = \ln n + \int_0^1 n\ln(u)(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

et par intégration par parties

$$\int_0^1 n\ln(u)(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u = [\ln(u)(1-(1-u)^n)]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-u)^n-1}{u}\,\mathrm{d}u$$

On notera qu'on a choisi $(1-(1-u)^n)$ pour primitive de $n(1-u)^{n-1}$ car celle-ci s'annule en 0 de sorte que l'intégration par parties n'engage que des intégrales convergentes.
Enfin

$$\int_0^1 \frac{(1-u)^n-1}{u}\,\mathrm{d}u = -\int_0^1 \frac{v^n-1}{v-1} = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} v^k\,\mathrm{d}v$$

puis

$$\int_0^1 \frac{(1-u)^n-1}{u}\,\mathrm{d}u = -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = -\ln n - \gamma + \mathrm{o}(1)$$

Finalement

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = -\gamma$$

Exercice 26 : [énoncé]
Par le changement de variable $u = t^{n+1}$, on obtient

$$(n+1)I_n = \int_0^1 f\left(u^{1/(n+1)}\right)\mathrm{d}u$$

Posons $f_n(u) = f\left(u^{1/(n+1)}\right)$ avec $u \in [0\,;1]$ et réunissons les hypothèses d'application du théorème de convergence dominée :

(1) Pour tout $u \in [0\,;1]$, on peut affirmer par continuité de f et composition de limites

$$f_n(u) = f\left(u^{1/(n+1)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f_\infty(u) = \begin{cases} f(0) & \text{si } u = 0 \\ f(1) & \text{si } u \in]0\,;1] \end{cases}$$

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0\,;1]$ vers la fonction f_∞ décrite ci-dessus.

(2) Les fonctions f_n et la fonction f_∞ sont continues par morceaux.

(3) La fonction f étant continue sur le segment $[0\,;1]$, elle y est bornée par un certain $M \in \mathbb{R}_+$ et alors

$$\forall u \in [0\,;1], |f_n(u)| = \left|f\left(u^{1/(n+1)}\right)\right| \leq M = \varphi(t)$$

La fonction constante φ est évidemment intégrable sur le segment $[0\,;1]$.

Par le théorème convergence dominée, on obtient

$$(n+1)I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f_\infty(u)\,\mathrm{d}u = f(1)$$

Sachant $f(1) \neq 0$, cette limite finie non nulle est aussi un équivalent et donc

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f(1)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f(1)}{n}$$

Exercice 27 : [énoncé]
Pour tout $t > 0$, on a

$$\frac{1}{\mathrm{e}^t-1} = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-nt}$$

donc

$$\frac{t}{\mathrm{e}^t-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ et, en vertu de l'étude qui précède, la série $\sum f_n$ converge simplement et sa somme est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$
Les fonctions f_n sont intégrables sur $]0\,;+\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

qui est sommable. On en déduit que la fonction $t \mapsto \frac{t}{\mathrm{e}^t-1}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

Exercice 28 : [énoncé]
Pour $x \in [0\,;1[$, on peut écrire

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$$

et pour $x \in]0\,;1[$, on a

$$\frac{(\ln x)^2}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}(\ln x)^2$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Considérons alors la série des fonctions

$$u_n(x) = (-1)^n x^{2n} (\ln x)^2$$

Par convergence des séries précédentes, la série des fonctions u_n converge simplement vers la fonction $x \mapsto (\ln x)^2/(1+x^2)$. Les fonctions u_n et la fonction somme sont continues par morceaux.
Chaque fonction u_n est intégrable et

$$\int_0^1 |u_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{2n}(\ln x)^2\,\mathrm{d}x$$

Par intégration par parties, on montre

$$\int_0^1 x^{2n}(\ln x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(2n+1)^3}$$

On peut alors appliquer le théorème d'intégration terme à terme et affirmer

$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

Exercice 29 : [énoncé]
Sur $]0\,;1[$,

$$\frac{\ln t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} (\ln t)$$

Posons $f_n(t) = (-1)^n t^{2n} \ln t$.
Les $f_n :]0\,;1[\to \mathbb{R}$ sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers $\frac{\ln t}{1+t^2}$ elle-même continue par morceaux sur $]0\,;1[$.

$$\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(2n+1)^2}$$

et la série $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge donc on peut intégrer terme à terme la série de fonctions et on obtient

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n t^{2n} \ln t\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}$$

Ce dernier calcul est non trivial et fait référence à la constante de Catalan.

Exercice 30 : [énoncé]
Pour $t \in]0\,;1[$, on peut écrire

$$\frac{\ln t}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \ln t$$

Or

$$\int_0^1 t^{2n} \ln t\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{(2n+1)^2}$$

Sachant que la série des intégrales des valeurs absolues converge, le théorème d'intégration terme à terme de Fubini donne

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = -\frac{3\zeta(2)}{4}$$

avec en substance la convergence de l'intégrale étudiée.

Exercice 31 : [énoncé]

a) Par intégration par parties avec convergence du terme entre crochet (car $\ln(1+t) \sim_{t\to 0} t$)

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(1+t)\ln(t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

b) Sur $]0\,;1[$,

$$-\frac{\ln t}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} t^n (\ln t)$$

Posons $f_n(t) = (-1)^{n-1} t^n \ln t$.
Les $f_n :]0\,;1[\to \mathbb{R}$ sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers $-\frac{\ln t}{1+t}$ elle-même continue par morceaux sur $]0\,;1[$.
On a

$$\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^2}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

et la série $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ converge donc on peut intégrer terme à terme la série de fonctions et donc

$$-\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^{n-1} t^n \ln t\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

c) En séparant les termes pairs et les termes impairs (ce qui se justifie en transitant par les sommes partielles)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 2\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Exercice 32 : [énoncé]

a) Par une intégration par parties avec convergence du terme entre crochet (car $\arctan t \underset{t\to 0}{\sim} t$)

$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(t)\arctan(t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

On obtient donc

$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

avec convergence des intégrales proposées

b) Pour tout t élément de $]0\,;1[$,

$$-\frac{\ln t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} t^{2n} (\ln t)$$

Posons $f_n(t) = (-1)^{n-1} t^{2n} \ln t$.
Les $f_n :]0\,;1[\to \mathbb{R}$ sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers $-\frac{\ln t}{1+t^2}$ elle-même continue par morceaux sur $]0\,;1[$.

$$\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(2n+1)^2}$$

et la série $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge donc on peut intégrer terme à terme la série de fonctions et donc

$$-\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^{n-1} t^{2n} \ln t\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

Rq : on aurait aussi pu exploiter $\arctan t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} t^{2n+1}$.

Exercice 33 : [énoncé]
Pour $t > 0$, on peut écrire

$$\frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin t.\mathrm{e}^{-nt}$$

La fonction $t \mapsto \sin t.\mathrm{e}^{-nt}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} |\sin t|\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

est le terme général d'une série convergente donc par le théorème de Fubini d'intégration terme à terme $t \mapsto \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin t.\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

avec

$$\int_0^{+\infty} \sin t.\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-n+i)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2+1}$$

Finalement

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

Exercice 34 : [énoncé]
Les intégrales considérées sont bien définies.
Par intégration par parties,

$$I_n(m) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)^m\right]_0^1 - \frac{m}{n+1} I_n(m-1)$$

Ainsi

$$I_n(m) = \frac{(-1)^m}{(n+1)^{m+1}} m!$$

En particulier

$$I_n(n) = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} n!$$

b) $x^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (x \ln x)^n$.
Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues,

$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} I_n(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 35 : [énoncé]
On a

$$\frac{1}{x^x} = \mathrm{e}^{-x\ln x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x\ln x)^n}{n!}$$

donc

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^x} = \int_{]0;1]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

avec

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n (x\ln x)^n}{n!}$$

Les f_n sont continues par morceaux, $\sum f_n$ CS vers une fonction continue par morceaux sur $]0\,;1]$.
Les f_n sont intégrables et

$$\int_{]0;1]} |f_n| = \int_{]0;1[} \frac{(-1)^n x^n (\ln x)^n}{n!}\,\mathrm{d}x$$

Or

$$\int_\varepsilon^1 x^n (\ln x)^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1}(\ln x)^n\right]_\varepsilon^1 - \frac{n}{n+1}\int_\varepsilon^1 x^n(\ln x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$$

donc quand $\varepsilon \to 0$

$$\int_{]0;1]} x^n (\ln x)^n\,\mathrm{d}x = -\frac{n}{n+1}\int_{]0;1]} x^n(\ln x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$$

Ainsi

$$\int_{]0;1]} x^n (\ln x)^n\,\mathrm{d}x = (-1)^n \frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n+1}\cdots\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

Par suite

$$\int_0^1 |f_n|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \text{ et } \sum \int_0^1 |f_n| \text{ converge}$$

Par le théorème d'intégration terme à terme de Fubini, on obtient que l'intégrale étudiée et définie et

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

puis le résultat voulu.

Exercice 36 : [énoncé]
Par la série exponentielle, on peut écrire pour $t > 0$,

$$t^{-t} = \exp(-t\ln t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(t\ln t)^n}{n!}$$

Pour procéder à une intégration terme à terme, posons $u_n(t) = (-1)^n (t\ln t)^n/n!$ pour $t \in]0\,;1]$.
Les fonctions u_n sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0\,;1]$ vers la fonction $t \mapsto t^{-t}$ elle-même continue par morceaux.
Les fonctions u_n sont intégrables sur $]0\,;1]$ car on peut les prolonger par continuité en 0 et

$$\int_0^1 |u_n(t)|\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Par intégration par parties

$$\int_\varepsilon^1 (t\ln t)^n\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}(\ln t)^n\right]_\varepsilon^1 - \frac{n}{n+1}\int_\varepsilon^1 t^n(\ln t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$$

En passant à la limite quand $\varepsilon \to 0$, on obtient

$$\int_0^1 (t\ln t)^n\,\mathrm{d}t = -\frac{n}{n+1}\int_0^1 t^n(\ln t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$$

En itérant le procédé on obtient

$$\int_0^1 (t\ln t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

et ainsi

$$\int_0^1 |u_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série $\sum \int_0^1 |u_n|$ étant convergente, on peut intégrer terme à terme et l'on obtient

$$\int_0^1 t^{-t}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{(n+1)}}$$

avec existence de l'intégrale en premier membre.

Exercice 37 : [énoncé]

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

a) $f_{p,k}$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;1]$.
Quand $x \mapsto 0^+$, $\sqrt{x} f_{p,k}(x) = x^{p+1/2}(\ln x)^k \to 0$ donc $f_{p,k}(x) = o\left(1/\sqrt{x}\right)$.
Par suite $f_{p,k}$ est intégrable sur $]0\,;1]$.

b) Par intégration par parties

$$K_{p,k} = -\frac{k}{p+1} K_{p,k-1}$$

c)

$$K_{p,k} = \frac{(-1)^k k!}{(p+1)^k} K_{p,0} = \frac{(-1)^k k!}{(p+1)^{k+1}}$$

et donc

$$J_n = K_{n,n} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

d) $x^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x \ln x)^n}{n!}$ pour tout $x \in]0\,;1]$.
Posons $f_n : x \mapsto \frac{1}{n!}(x \ln x)^n$.
Les fonctions f_n sont continues par morceaux et intégrables sur $]0\,;1]$.
La série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0\,;1]$ et sa somme, qui est $x \mapsto x^x$, est continue par morceaux sur $]0\,;1]$.
Enfin

$$\int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

est terme général d'une série convergente.
Par théorème d'intégration terme à terme, $x \mapsto x^x$ est intégrable sur $]0\,;1]$ et

$$I = \int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

Exercice 38 : [énoncé]
Pour $x \in]0\,;1[$, on a

$$\frac{(\ln x)^p}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n (\ln x)^p = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

avec $f_n(x) = x^n(\ln x)^p$ sur $]0\,;1[$.
Les fonctions f_n sont continues par morceaux et la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ l'est aussi.
Les fonctions f_n sont intégrables sur $]0\,;1[$ et par intégration par parties,

$$\int_0^1 |f_n| = (-1)^p \int_0^1 x^n (\ln x)^p\,\mathrm{d}x = \frac{p!}{(n+1)^{p+1}}$$

Puisque la série $\sum \int |f_n|$ converge, le théorème d'intégration terme à terme de Fubini donne

$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^p}{1-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^p p! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$$

avec en substance existence de l'intégrale et de la série intoduite.

Exercice 39 : [énoncé]
Pour $x > 0$,

$$x^x = \mathrm{e}^{x \ln x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x \ln x)^n}{n!}$$

donc

$$\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \int_{]0;1]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

avec

$$f_n(x) = \frac{(x \ln x)^n}{n!}$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux, $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction continue par morceaux sur $]0\,;1]$.
Les fonctions f_n sont intégrables et

$$\int_{]0;1]} |f_n| = \int_{]0;1[} \frac{(-1)^n x^n (\ln x)^n}{n!}\,\mathrm{d}x$$

Or

$$\int_\varepsilon^1 x^n (\ln x)^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} (\ln x)^n\right]_\varepsilon^1 - \frac{n}{n+1} \int_\varepsilon^1 x^n (\ln x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$$

donc quand $\varepsilon \to 0$

$$\int_{]0;1]} x^n (\ln x)^n\,\mathrm{d}x = -\frac{n}{n+1} \int_{]0;1]} x^n (\ln x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$$

Ainsi

$$\int_{]0;1]} x^n (\ln x)^n\,\mathrm{d}x = (-1)^n \frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n+1} \cdots \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

Par suite

$$\int_0^1 |f_n|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

et il y a convergence de la série $\sum \int_0^1 |f_n|$
Par le théorème d'intégration terme à terme, on obtient que l'intégrale $\int_{]0;1]} x^x \,\mathrm{d}x$ est définie et

$$\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

puis le résultat voulu.

Exercice 40 : [énoncé]

a) Sur $[0\,;1[$, la série de fonction $\sum f_n$ converge simplement et sa somme est

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \frac{x}{1-x}(1-\sqrt{x}) = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$$

Cette fonction somme est continue par morceaux sur $[0\,;1[$.
Les fonction f_n sont intégrables sur $[0\,;1[$ et

$$\int_0^1 |f_n(x)| \,\mathrm{d}x = \int_0^1 f_n(x) \,\mathrm{d}x \underset{u=\sqrt{x}}{=} \frac{1}{(n+1)(2n+3)}$$

Ce terme est sommable et l'on peut donc intégrer terme à terme ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$$

b) Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+3)} = \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x \underset{u=\sqrt{x}}{=} \frac{5}{3} - 2\ln 2$$

Exercice 41 : [énoncé]
Pour $x \in [0\,;2\pi]$, on peut écrire

$$\mathrm{e}^{2\cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n \cos^n x}{n!}$$

Posons

$$f_n : x \in [0\,;2\pi] \mapsto \frac{2^n \cos^n x}{n!}$$

Les fonctions f_n sont continues et la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[0\,;2\pi]$ puisque

$$\|f_n\|_\infty \leq \frac{2^n}{n!} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On peut donc intégrer terme à terme pour obtenir

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{2\cos x} \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \int_0^{2\pi} (\cos x)^n \,\mathrm{d}x$$

Par intégration par parties (cf. intégrale de Wallis)

$$\int_0^{2\pi} (\cos x)^n \,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n} \int_0^{2\pi} (\cos x)^{n-2} \,\mathrm{d}x$$

Sachant

$$\int_0^{2\pi} (\cos x)^0 \,\mathrm{d}x = 2\pi \text{ et } \int_0^{2\pi} (\cos x)^1 \,\mathrm{d}x = 0$$

on obtient

$$\int_0^{2\pi} (\cos x)^{2p} \,\mathrm{d}x = 2\pi \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \text{ et } \int_0^{2\pi} (\cos x)^{2p+1} \,\mathrm{d}x = 0$$

et donc

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{2\cos x} \,\mathrm{d}x = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p}}{(2p)!} \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} 2\pi = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2\pi}{(p!)^2}$$

Exercice 42 : [énoncé]

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \mathrm{e}^{ik\theta} \,\mathrm{d}\theta$$

Par convergence normale de la série de fonctions sous-jacente sur $[0\,;2\pi]$

$$I_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n+k)\theta} \,\mathrm{d}\theta$$

Or $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ip\theta} \,\mathrm{d}\theta = 0$ si $p \neq 0$ et $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ip\theta} \,\mathrm{d}\theta = 2\pi$ si $p = 0$.
Par conséquent

$$I_n = (-1)^n 2^n \pi \text{ si } n \leq 0 \text{ et } I_n = 0 \text{ si } n > 0$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 43 : [énoncé]
Si $|a|<1$ alors

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-a}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)t}}{1-a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}a^k\,\mathrm{e}^{i(n-(k+1))t}\,\mathrm{d}t$$

Par convergence normale de la série

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-a}\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{+\infty}a^k\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-(k+1))t}\,\mathrm{d}t=\begin{cases}2\pi a^{n-1} & \text{si } n\geq 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Si $|a|>1$ alors

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-a}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{int}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}/a}\,\mathrm{d}t$$

$$=-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{a^{k+1}}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+k)t}\,\mathrm{d}t=\begin{cases}-2\pi a^{n-1} & \text{si } n\leq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Exercice 44 : [énoncé]
Par sommation géométrique

$$\forall t>0,\ \frac{t\mathrm{e}^{-at}}{1-\mathrm{e}^{-bt}}=\sum_{n=0}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-(a+nb)t}$$

Posons $f_n:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(t)=t\mathrm{e}^{-(a+nb)t}$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0\,;+\infty[$ et sa somme est continue par morceaux puisque c'est la fonction

$$t\mapsto\frac{t\mathrm{e}^{-at}}{1-\mathrm{e}^{-bt}}$$

Les fonctions f_n sont intégrables sur $]0\,;+\infty[$ et par intégration par parties

$$\int_{[0;+\infty[}|f_n|=\int_0^{+\infty}f_n=\frac{1}{(a+bn)^2}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Puisque la série $\sum\int|f_n|$ converge, on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme de Fubini et on obtient

$$\int_0^{+\infty}\frac{t\mathrm{e}^{-at}}{1-\mathrm{e}^{-bt}}\,\mathrm{d}t=\int_{[0;+\infty[}\sum_{n=0}^{+\infty}f_n=\sum\int_{[0;+\infty[}f_n\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(a+bn)^2}$$

Exercice 45 : [énoncé]
La convergence de l'intégrale proposée est facile.
En découpant l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-k\pi/n}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

Dans la somme proposée, le terme intégrale ne dépend de l'indice sommation donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-k\pi/n}\right)\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi/n}}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

Quand $n\to+\infty$,

$$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi/n}}\sim\frac{n}{\pi}$$

et

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\to\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$$

par application du théorème de convergence dominée.
Par le changement de variable $t=\tan x$ inspiré des règles de Bioche,

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}=2\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}=2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{2+t^2}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Au final

$$\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x/n}}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Exercice 46 : [énoncé]

a) On a

$$u_n(1)=\int_0^{\pi/2}\sin t(\cos t)^n\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}t\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{n+1}$$

La série de terme général $u_n(1)$ est divergente.

b) Pour $\alpha\leq 1$,

$$\forall t\in]0\,;\pi/2],\ (\sin t)^{\alpha}\geq\sin t$$

et donc $u_n(\alpha)\geq u_n(1)$.
On en déduit que la série de terme général $u_n(\alpha)$ est alors divergente.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Pour $\alpha > 1$. La série des $u_n(\alpha)$ est une série à termes positifs et

$$\sum_{k=0}^{n} u_k(\alpha) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^\alpha \frac{1-(\cos t)^{n+1}}{1-\cos t}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n} u_k(\alpha) \leq \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin t)^\alpha}{1-\cos t}\,\mathrm{d}t$$

avec l'intégrale majorante qui est convergente puisque

$$\frac{(\sin t)^\alpha}{1-\cos t} \sim 2\frac{t^\alpha}{t^2} = \frac{2}{t^{2-\alpha}} \text{ quand } t \to 0^+$$

Puisque la série à termes positifs $\sum u_n(\alpha)$ a ses sommes partielles majorées, elle est convergente.

c) Par ce qui précède, on peut intégrer terme à terme car il y a convergence de la série des intégrales des valeurs absolues des fonctions. On peut alors écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^\alpha t \cos^n t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^\alpha t}{1-\cos t}\,\mathrm{d}t$$

Pour $\alpha = 2$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{1-\cos t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} 1+\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}+1$$

Pour $\alpha = 3$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 t}{1-\cos t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin t(1+\cos t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}$$

Exercice 47 : [énoncé]

a) Par intégration par parties on obtient une relation de récurrence qui conduit à

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m\,\mathrm{d}x = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$$

En posant u_n le terme général de la série étudiée, on observe $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \frac{1}{4}$ ce qui assure la convergence de la série.

b) $S_{-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 x^n(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$. Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, on peut permuter et obtenir

$$S_{-1} = \int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{1-x(1-x)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Puisque

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{4n+2}{n+1}\binom{2n}{n}$$

on observe

$$\frac{4}{\binom{2n+2}{n+1}} - \frac{2}{n+1}\frac{1}{\binom{2n+2}{n+1}} = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \quad (*)$$

En sommant pour n allant de 1 à $+\infty$, on obtient

$$4\left(S_0 - \frac{1}{2}\right) - 2\left(S_{-1} - \frac{1}{2}\right) = S_0$$

puis

$$S_0 = \frac{1+2S_{-1}}{3}$$

c) On multiplie la relation$(*)$ par $(n+1)^p$ et on développe le $(n+1)^p$ du second membre et en sommant comme ci-dessus, on saura exprimer $3S_p$ en fonction des S_q avec $q < p$.

Exercice 48 : [énoncé]

a) $f : x \mapsto \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}$ est définie, continue sur $[0\,;+\infty[$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{x^2}$ donc $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est définie.

b)

$$\int_0^a \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{1}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x - 2\int_0^a \frac{x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

et

$$\int_0^a \frac{x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{n^2+x^2}\right]_0^a + \frac{1}{2}\int_0^a \frac{1}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x$$

donc

$$\int_0^a \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{n^2+a^2}$$

Par suite

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty} \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente et de somme nulle.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

c) Pour $x \in [0\,;a]$,

$$\left|\frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\right| \leq \frac{n^2+a^2}{n^4}$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+a^2}{n^4} < +\infty$$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}$ converge normalement, et donc uniformément sur $[0\,;a]$.
Par suite

$$\int_0^a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^a \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$$

d) La fonction $x \mapsto \frac{a}{x^2+a^2}$ est décroissante et intégrable sur $[0\,;+\infty[$ donc par comparaison série-intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{a}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2} \leq \int_0^{+\infty} \frac{a}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$$

Or

$$\int_1^{+\infty} \frac{a}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \left[\arctan\frac{x}{a}\right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{a}$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{a}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \left[\arctan\frac{x}{a}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

donc

$$\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2}$$

e) Ci-dessus :

$$\lim_{a\to+\infty} \int_0^a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

donc l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

est convergente et vaut $\pi/2$.
Le résultat diffèrent de celui obtenu en b). Il est donc faux ici de permuter somme et intégrale. Document7

Exercice 49 : [énoncé]

a) $a_{n+1}/a_n \to 1/\mathrm{e} < 1$.

b) Posons

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$$

Par intégration par parties, on obtient $I_n = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ d'où

$$a_n = n\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

c) On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} nt^n \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

et la série

$$\sum \int_0^{+\infty} \left|nt^n \mathrm{e}^{-nt}\right|\mathrm{d}t = \sum a_n$$

converge donc on peut intégrer terme à terme et on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} nt^n \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

avec

$$(1-t\mathrm{e}^{-t}) \sum_{n=1}^{+\infty} nt^n \mathrm{e}^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-nt} = \frac{t\mathrm{e}^{-t}}{1-t\mathrm{e}^{-t}}$$

d'où la conclusion.

Exercice 50 : [énoncé]

a) Posons $u_n(t) = 1/(1+t^n)$ sur $]0\,;1]$.
La suite de fonctions (u_n) converge simplement vers la fonction $u_\infty : t \mapsto 1$.
Les fonctions u_n et la fonction u_∞ sont continues par morceaux.
Enfin

$$\forall t \in]0\,;1], |u_n(t)| \leq 1 = \varphi(t)$$

avec $\varphi :]0\,;1] \to \mathbb{R}_+$ intégrable. Par convergence dominée

$$I_n = \int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 u_\infty(t)\,\mathrm{d}t = 1 = \ell$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

b) On a

$$\ell - I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\frac{t^{n-1}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$$

Par intégration par parties,

$$\ell - I_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$$

Puisque

$$\left|\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

on peut affirmer $\ell - I_n \sim \frac{\ln 2}{n}$.

c) Pour $y \in]0\,;1[$,

$$\frac{\ln(1+y)}{y} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^k}{k+1}$$

Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues,

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\,\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$$

Sans peine, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$ sachant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

d) Par le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $y = t^n$

$$\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y^{\frac{n-1}{n}}}\,\mathrm{d}y$$

Par convergence dominée (domination par sa limite simple),

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y^{\frac{n-1}{n}}}\,\mathrm{d}y \to \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi^2}{12}$$

Ainsi,

$$\ell - I_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{\pi^2}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

puis

$$I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 51 : [énoncé]

a) On a

$$|I_n - 1| = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \to 0$$

donc $I_n \to \ell = 1$.

b) Par intégration par parties

$$I_n - 1 = -\frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$$

Or

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t \to 0$$

donc

$$I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

c) On a

$$\ln(1+t^n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^{nk}$$

Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, on obtient la relation proposée.

d) On a

$$n\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2(nk+1)}$$

avec

$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2(nk+1)}\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \to 0$$

donc

$$n\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t \to \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$$

avec

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

car on sait

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Finalement

$$I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 52 : [énoncé]

a) Par la règle de d'Alembert la série converge pour tout $(s,\lambda) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}$.
$\Delta_\lambda : \ ]0;+\infty[$.

b)

$$F_\lambda(s) = \frac{1}{s}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)}\right)$$

Or

$$\left|1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)}\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\lambda|^n}{n!} = \mathrm{e}^{|\lambda|}$$

donc $F_\lambda(s) \underset{s\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

c) Puisque

$$\left|\frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)}\right| \leq \frac{\lambda^n}{n!}$$

il y a converge normale sur $\mathbb{R}_+$ de la série des fonctions continues $s \mapsto \frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)}$. Ceci permet d'affirmer

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)} \underset{s\to 0}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \mathrm{e}^\lambda$$

et donc

$$F_\lambda(s) \underset{s\to 0^+}{\sim} \frac{\mathrm{e}^\lambda}{s}$$

d) Par intégrations par parties successives :

$$\int_0^1 (1-y)^{s-1} y^n \,\mathrm{d}y = \frac{n!}{s(s+1)\dots(s+n)}$$

e)

$$F_\lambda(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \int_0^1 (1-y)^{s-1} y^n \,\mathrm{d}y$$

Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, on peut échanger somme et intégrale :

$$F_\lambda(s) = \int_0^1 \mathrm{e}^{\lambda y}(1-y)^{s-1} \,\mathrm{d}y$$

Exercice 53 : [énoncé]
La série $\sum a_p \frac{t^p}{p!}$ est convergente car

$$\left|a_p \frac{t^p}{p!}\right| \leq \|(a_n)\|_\infty \frac{t^p}{p!}$$

De plus sa somme est continue car on peut aisément établir la convergence normale sur tout segment.
Enfin

$$\left|\sum_{p=n}^{+\infty} a_p \frac{t^p}{p!}\right| \leq \|(a_n)\|_\infty \mathrm{e}^t$$

permet d'assurer l'existence de l'intégrale étudiée.
Posons

$$f_p(t) = a_p \frac{t^p}{p!} \mathrm{e}^{-2t}$$

La série de fonction $\sum f_p$ convergence simplement.
Les fonctions f_p et $\sum_{p=n}^{+\infty} f_p$ sont continues par morceaux.
Les fonctions f_p sont intégrables sur $[0\,;+\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} |f_p(t)| \,\mathrm{d}t = \frac{|a_p|}{2^{p+1}} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{2^{p+1}}\right)$$

est terme générale d'une série convergente.
Par le théorème d'intégration terme à terme de Fubini, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\left(\sum_{p=n}^{+\infty} a_p \frac{t^p}{p!}\right) \mathrm{d}t = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{a_p}{2^{p+1}}$$

Enfin, cette expression tend vers 0 en tant que reste d'une série convergente.

Exercice 54 : [énoncé]
On sait que la fonction ζ est continue.

$$\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1) \,\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \,\mathrm{d}x$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

avec

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{n^x} = \frac{1}{n^2 \ln n}$$

La convergence de la série des intégrales des valeurs absolues assure la convergence de l'intégrale du premier membre et permet de permuter intégrale et somme. On obtient alors

$$\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$$

Exercice 55 : [énoncé]

a) Posons

$$f_n(x) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\right)^n$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux et la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0\,;\pi/2[$, elle-même continue par morceaux. Enfin, on a la domination

$$|f_n(x)| \leq 1 = \varphi(x)$$

avec φ évidemment intégrable sur $[0\,;\pi/2[$. Par convergence dominée, on obtient

$$u_n \to 0$$

b) Par l'absurde, si $\sum u_n$ converge alors, on peut appliquer un théorème d'intégration terme à terme à la série de fonctions $\sum f_n$. En effet, les fonctions f_n sont continues par morceaux, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0\,;\pi/2[$ vers la fonction

$$f\colon x \mapsto \frac{1}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)}$$

elle-même continue par morceaux. Enfin les fonctions f_n sont intégrables sur $[0\,;\pi/2[$ et l'hypothèse de travail absurde signifie la convergence de la série $\sum \int_{[0;\pi/2[} |f_n|$.
Par théorème d'intégration terme à terme, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)}\,\mathrm{d}x$$

avec convergence de l'intégrale. Or, quand $x \to 0^+$

$$\frac{1}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)} \sim \frac{8}{\pi^2 x^2}$$

et donc l'intégrale introduite diverge. C'est absurde.
On en déduit que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 56 : [énoncé]
On a $u_n \geq v_n = \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-t}\cos^{2n} t\,\mathrm{d}t$.
Si la série numérique $\sum u_n$ converge alors, par comparaison de série à termes positifs, la série $\sum v_n$ converge aussi. Par le théorème d'intégration terme à terme de Fubini, il y a alors intégrabilité sur $]0\,;\pi/2]$ de la fonction

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\cos^{2n} t = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\cos^2 t} = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sin^2 t}$$

Or quand $t \to 0^+$

$$\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sin^2 t} \sim \frac{1}{t^2}$$

qui n'est pas intégrable sur $]0\,;\pi/2]$.
C'est absurde, on en conclut que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 57 : [énoncé]

a) La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^x)^n}$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
Cas $x < 0$:
$\frac{1}{(1+t^x)^n} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc la fonction n'est pas intégrable.
Cas $x = 0$:
$\frac{1}{(1+t^x)^n} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$. Même conclusion.
Cas $x > 0$:
Quand $t \to 0^+$, $\frac{1}{(1+t^x)^n} \to 1$ et quand $t \to +\infty, \frac{1}{(1+t^x)^n} \sim \frac{1}{t^{nx}}$ donc la fonction est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ si, et seulement si, $nx > 1$.

b) Pour $t > 0$, on remarque que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^x)^n} = \frac{1}{t^x}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Par l'absurde, si $\sum I_n(x)$ converge, on peut appliquer un théorème d'interversion somme et intégrale assurant que $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$. C'est absurde.
On conclut que $\sum I_n(x)$ diverge.
Par intégration par parties avec deux convergences

$$I_n(2) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2nt^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = 2n\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$

Or

$$I_n(2) - I_{n+1}(2) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n+1}}$$

donc

$$I_{n+1}(2) = \frac{2n-1}{2n} I_n(2)$$

On en déduit

$$I_{n+1}(2) = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}$$

car $I_1(2) = \pi/2$.
Notons que par le changement de variable $t = \tan u$, on pouvait aussi transformer $I_n(2)$ en une intégrale de Wallis.

Exercice 58 : [énoncé]

a) Posons $f_n(t) = 1/(1+t^3)^n$ définie sur $[0\,;1]$.
Les fonctions f_n sont continues par morceaux et la suite (f_n) converge simplement sur $]0\,;1]$ vers la fonction nulle, elle-même continue par morceaux.
De plus

$$\forall n \geq 1, \forall t \in]0\,;1], |f_n(t)| \leq \varphi(t)$$

avec $\varphi\colon t \mapsto 1/(1+t^3)$ intégrable sur $]0\,;1]$.
Par application du théorème de convergence dominée, on obtient $u_n \to 0$

b) Les fonctions f_n sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0\,;1]$ vers la fonction S continue par morceaux donnée par

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{1+t^3}} = \frac{1+t^3}{t^3}$$

Si, par l'absurde, la série $\sum u_n$ converge, on est dans la situation où la série de terme général $\int_{]0;1]} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge et l'on peut appliquer un théorème d'intégration terme à terme affirmant :

$$S \text{ est intégrable sur }]0\,;1] \text{ et } \int_{]0;1]} S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Or ceci est absurde car la fonction S n'est pas intégrable sur $]0\,;1]$!
On en déduit que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 59 : [énoncé]

a) Posons $u_n(t) = 1/(1+t^3)^n$ définie sur $]0\,;+\infty[$.
Les fonctions u_n sont continues par morceaux et la suite (u_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $]0\,;+\infty[$, elle-même continue par morceaux. De plus

$$\forall n \geq 1, \forall t \in]0\,;+\infty[, |u_n(t)| \leq \varphi(t)$$

avec $\varphi\colon t \mapsto 1/(1+t^3)$ intégrable sur $[0\,;+\infty[$ et donc aussi sur $]0\,;+\infty[$.
Par application du théorème de convergence dominée sur $]0\,;1]$ et sur $[1\,;+\infty[$, on obtient

$$U_n \to 0 \text{ et } V_n \to 0$$

b) Les fonctions u_n sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0\,;1]$ vers la fonction U continue par morceaux donnée par

$$U(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n} = \frac{1}{1+t^3}\frac{1}{1-\frac{1}{1+t^3}} = \frac{1}{t^3}$$

Si, par l'absurde, la série $\sum U_n$ converge, on est dans la situation où la série de terme général $\int_{]0;1]} |u_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge et l'on peut appliquer un théorème d'intégration terme à terme affirmant :

$$U \text{ est intégrable sur }]0\,;1] \text{ et } \int_{]0;1]} U(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Or ceci est absurde car la fonction U n'est pas intégrable sur $]0\,;1]$!
On en déduit que la série $\sum U_n$ diverge.
En revanche, la série $\sum V_n$ est à termes positifs et

$$\sum_{k=1}^{n} V_k \leq \int_1^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+t^3)^n}\,\mathrm{d}t \leq \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{1}{2}$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum V_n$ étant majorées, on peut affirmer que la série $\sum V_n$ converge.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 60 : [énoncé]

a) Quand $x \to 0^+$, $f_n(x) \sim \frac{2x}{nx} \to \frac{2}{n}$ donc $\alpha = \frac{2}{n}$ est l'unique valeur pour laquelle f est continue en 0.

b) f_n est continue sur $[0\,;+\infty[$ et quand $x \to +\infty$, $f_n(x) \sim \frac{e^x}{e^{nx}} \to 0$ donc f_n est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
On peut envisager une argumentation plus détaillée :
- puisque f converge en $+\infty$, il existe $A \geq 0$ tel que f est bornée sur $[A\,;+\infty[$;
- puisque f est continue, f est bornée sur $[0\,;A]$;
- et finalement f est bornée sur la réunion de ces deux intervalles par la plus grande des deux bornes.

c) f_n est définie et continue sur $[0\,;+\infty[$ et quand $x \to +\infty$,
$x^2 f_n(x) \sim x^2 e^{-(n-1)x} \to 0$ donc $f_n(x) = o\left(1/x^2\right)$ et donc f est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.

d) Pour $x > 0$,

$$\frac{2\operatorname{sh} x}{e^{nx}-1} = 2\operatorname{sh} x \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-nkx} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(e^{-(nk-1)x} - e^{-(nk+1)x}\right)$$

$$\int_0^{+\infty} \left|e^{-(nk-1)x} - e^{-(nk+1)x}\right| dx = \frac{1}{nk-1} - \frac{1}{nk+1} = \frac{2}{n^2k^2-1} = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, on peut sommer terme à terme et affirmer

$$\int_0^{+\infty} \frac{2\operatorname{sh} x}{e^{nx}-1}\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(e^{-(nk-1)x} - e^{-(nk+1)x}\right) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{nk-1} - \frac{1}{nk+1}$$

Pour $n = 2$, la somme est facile à calculer.

Exercice 61 : [énoncé]

a) Par convergence dominée $I_n \to 0$.

b) Par intégration par parties avec convergence du crochet

$$I_n = \left[\frac{t}{(1+t^3)^n}\right]_0^{+\infty} + 3n \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}}\,dt$$

avec

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}}\,dt = I_n - I_{n+1}$$

On en déduit la relation demandée.

c) La suite (u_n) a la nature de la série de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$.
Or

$$v_n = \alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3n}\right) = \frac{\alpha - 1/3}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série de terme général v_n converge si, et seulement si, $\alpha = 1/3$.

d) Puisque $\ln\left(n^{1/3} I_n\right) \to \ell$, on obtient

$$I_n \sim \frac{e^\ell}{\sqrt{[3]n}}$$

et donc

$$\frac{1}{n} I_n = O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)$$

Par suite $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} I_n$ converge.
On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} I_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt \text{ avec } f_n(t) = \frac{1}{n} \frac{1}{(1+t^3)^n}$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $]0\,;+\infty[$, la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0\,;+\infty[$ et sa somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{(1+t^3)^n} = -\ln\left(1 - \frac{1}{1+t^3}\right)$$

est continue par morceaux.
Enfin, la série de terme général $\int_0^{+\infty} |f_n|$ converge.
On peut donc permuter somme et intégrale pour obtenir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} I_n = -\int_0^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{1+t^3}\right) dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi$$

la dernière intégrale étant calculer par intégration par parties puis

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Exercice 62 : [énoncé]

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

a) La fonction définissant l'intégrale I_k est intégrable sur $]0\,;1]$ car

$$\sqrt{t}\times t^{k-1}\ln(t)\underset{t\to 0^+}{\longrightarrow}0$$

Par une intégration par parties avec convergence du crochet, on obtient

$$I_k=\left[\frac{t^k\ln(t)}{k}\right]_0^1-\int_0^1\frac{t^{k-1}}{k}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{k^2}$$

b) Le terme R_n est bien définie car c'est le reste d'une série convergeant absolument. Ce qui précède, nous encourage à écrire

$$R_n=-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\int_0^1(-t)^{k-1}\ln(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour intégrer terme à terme, on introduit $u_k\colon\,]0\,;1]\to\mathbb{R}$ définie par

$$u_k(t)=(-t)^{k-1}\ln(t)$$

Par sommation géométrique, la série des fonctions u_k converge simplement sur $]0\,;1[$ (et même sur $]0\,;1]$). Les fonctions u_k sont toutes continues par morceaux et la fonction somme

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k\colon t\mapsto\frac{(-1)^nt^n\ln(t)}{1+t}$$

l'est aussi. Les fonctions u_k sont intégrables sur $]0\,;1]$ et il y a convergence de la série

$$\sum\int_0^1|u_k|=\sum\frac{1}{k^2}$$

Les hypothèses du théoème d'intégration terme à terme sont réunies et donc

$$R_n=-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\int_0^1(-t)^{k-1}\ln(t)\,\mathrm{d}t=-\int_0^1\frac{(-1)^nt^n\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

c) On opère encore une intégration terme à terme en considérant cette fois-ci les fonctions v_n déterminées par

$$v_n(t)=\frac{(-1)^nt^n\ln(t)}{1+t}\text{ avec }t\in\,]0\,;1]\text{ et }n\in\mathbb{N}$$

Encore une fois les hypothèses d'usages sont réunies, notamment parce que

$$\int_0^1|v_n(t)|\,\mathrm{d}t\leq\int_0^1t^n\,|\ln(t)|\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n^2}$$

On en déduit

$$\sum_{n=0}^{+\infty}R_n=-\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}v_n(t)\,\mathrm{d}t=-\int_0^1\frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Par une intégration par parties impropre où l'on choisit $1-\frac{1}{1+t}=\frac{t}{1+t}$ comme primitive de $\frac{1}{(1+t)^2}$ on obtient

$$\int_0^1\frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t\ln(t)}{1+t}\right]_0^1-\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=-\ln 2$$

On peut conclure

$$\sum_{n=0}^{+\infty}R_n=\ln 2$$

Exercice 63 : [énoncé]

On a

$$\frac{1}{1+t^a}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nt^{na}=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(t)$$

avec $f_n(t)=(-1)^nt^{na}$ sur $]0\,;1[$.

$$\int_0^1|f_n(t)|\,\mathrm{d}t=\frac{1}{na+1}$$

et $\sum\frac{1}{na+1}$ diverge, le théorème d'intégration terme à terme de Fubini ne s'applique pas.

De plus la série de fonctions ne converge par uniformément sur $[0\,;1]$ car elle ne converge pas simplement en $1\ldots$

Transitons alors par les sommes partielles et le théorème de convergence dominée.

Posons

$$S_n\colon t\mapsto\sum_{k=0}^{n}(-1)^kt^{ka}=\frac{1-(-1)^{n+1}t^{(n+1)a}}{1+t^a}$$

Les fonctions S_n sont continues par morceaux et la suite (S_n) converge simplement sur $[0\,;1[$ vers la fonction

$$S\colon t\mapsto\frac{1}{1+t^a}$$

elle-même continue par morceaux.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

De plus

$$|S_n(t)| \leq \frac{2}{1+t^a} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $[0\,;1[$.
Par le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\int_0^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a}$$

Or

$$\int_0^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k t^{ka}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{ka+1}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a}$$

avec, en substance, la convergence de la série introduite.

Exercice 64 : [énoncé]
Notons que l'intégrale étudiée est bien définie.
Pour tout $x \in]0\,;1[$,

$$\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{n+\alpha-1}$$

Le théorème d'intégration terme à terme ne pourra pas s'appliquer car ici

$$\sum \int_{]0;1[} |f_n| = \sum \frac{1}{n+\alpha} \text{ diverge}$$

Nous allons alors intégrer terme à terme en exploitant les sommes partielles.
Posons

$$S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{k+\alpha-1} = x^{\alpha-1} \frac{1-(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$$

Les fonctions S_n sont continues par morceaux et convergent simplement sur $]0\,;1[$ vers la fonction

$$S : x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$$

elle-même continue par morceaux.
De plus

$$|S_n(x)| \leq \frac{2x^{\alpha-1}}{1+x} = \varphi(x)$$

avec φ fonction intégrable sur $]0\,;1[$.
Par le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x \to \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

Or

$$\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k x^{k+\alpha-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+\alpha}$$

et on peut donc conclure

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

avec en substance la convergence de la série introduite.

Exercice 65 : [énoncé]

a) Pour $t \in]0\,;1[$, on peut écrire

$$\frac{t^{a-1}}{1+t^b} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{a+nb-1}$$

Posons

$$S_n : t \mapsto \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{a+kb-1} = t^{a-1} \frac{1-(-1)^{n+1}t^{(n+1)b}}{1+t^b}$$

Les fonctions S_n sont continues par morceaux et la suite (S_n) converge simplement sur $]0\,;1[$ vers la fonction

$$S : t \mapsto \frac{t^{a-1}}{1+t^b}$$

elle-même continue par morceaux.
De plus

$$|S_n(t)| \leq \frac{2t^{a-1}}{1+t^b} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0\,;1[$.
Par convergence dominée, on obtient

$$\int_0^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

avec convergence de l'intégrale introduite.
Or

$$\int_0^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k t^{a+kb-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{a+kb}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$$

avec convergence de la série introduite..

b) Après calculs

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Exercice 66 : [énoncé]
Soit $f_n : [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_n(t) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}$$

On observe $\|f_n\|_\infty = 1/n^2$ et donc la série des fonctions f_n converge normalement, donc uniformément sur $[0\,;+\infty[$. Puisque chaque f_n est continue, on peut affirmer que la fonction

$$S : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}$$

est définie et continue sur $[0\,;+\infty[$.
Les fonctions f_n sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{n^2+t^2} = \frac{\pi}{2n}$$

Puisque la série $\sum \int |f_n|$ diverge, on ne peut intégrer terme à terme par le théorème de Fubini.
Raisonnons alors par les sommes partielles en exploitant le théorème de convergence dominée.
Posons

$$S_n : t \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2+t^2}$$

Les fonctions S_n sont continues par morceaux sur $[0\,;+\infty[$ et converge simplement vers la fonction S elle-même continue par morceaux.
De plus, le critère spécial des séries alternées s'appliquant, on a

$$0 \leq S_n(t) \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Par le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\int_0^{+\infty} S_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_0^{+\infty} S_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

donc

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}\,\mathrm{d}t$$

avec convergence de la série introduite.

Exercice 67 : [énoncé]
Posons

$$f_n : x \mapsto (-1)^n\,\mathrm{e}^{-a_n x}$$

Les fonctions f_n sont continues et en vertu du critère spécial des séries alternées, on peut affirmer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0\,;+\infty[$. De plus, par le critère spécial des séries alternées, on a

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k\,\mathrm{e}^{-a_k x}\right| \leq \mathrm{e}^{-a_{n+1}x}$$

ce qui permet d'établir que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $]0\,;+\infty[$. On en déduit que la fonction

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\,\mathrm{e}^{-a_n x}$$

est définie et continue sur $]0\,;+\infty[$.
Pour intégrer terme à terme, nous allons exploiter les sommes partielles et le théorème de convergence dominée. Posons

$$S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\,\mathrm{e}^{-a_k x}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Les fonctions S_n sont continues par morceaux et la suite (S_n) converge simplement vers S elle-même continue par morceaux.
En vertu du critère spécial des séries alternées, on a

$$0 \leq S_n(x) \leq S_0(x) = \mathrm{e}^{-a_0 x} = \varphi(x)$$

avec φ intégrable.
Par convergence dominée, on obtient

$$\int_0^{+\infty} S_n(x)\,\mathrm{d}x \to \int_0^{+\infty} S(x)\,\mathrm{d}x$$

avec convergence de l'intégrale introduite.
Or

$$\int_0^{+\infty} S_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \int_0^{+\infty} (-1)^k \mathrm{e}^{-a_k x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{a_k}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n} = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{-a_n x}\,\mathrm{d}x$$

avec en substance convergence de la série écrite.

Exercice 68 : [énoncé]

a) La fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;1]$.
Quand $t \to 0^+$,

$$\frac{t^{x-1}}{1+t} \sim t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$$

avec $1-x<1$ et donc $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ est intégrable sur $]0\,;1]$.

b) Posons $g(x,t) = \frac{t^{x-1}}{1+t}$ sur $]0\,;+\infty[\times]0\,;1]$.
$t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;1]$,
$x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $]0\,;+\infty[$.
Soit $[a\,;b] \subset \mathbb{R}_+^*$,

$$\forall (x,t) \in [a\,;b] \times]0\,;1], |g(x,t)| \leq \frac{t^{a-1}}{1+t} \leq t^{a-1} = \varphi_a(t)$$

avec φ_a intégrable sur $]0\,;1]$.
Par domination sur tout segment de $]0\,;+\infty[$, on peut affirmer que f est continue sur $]0\,;+\infty[$.

c) Pour $x>0$

$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

d) Quand $x \to 0^+$, $f(x+1) \to f(1)$ par continuité. On a donc $f(x+1) = \mathrm{o}(1/x)$ puis

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Quand $x \to +\infty$,

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \to 0$$

donc

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 69 : [énoncé]

a) Posons $f\colon [0\,;+\infty[\times [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+tx}$$

Pour chaque $x \in [0\,;+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$ et intégrable car

$$t^2 f(x,t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit la convergence de l'intégrale impropre définissant $F(x)$.

b) Pour chaque $t \in [0\,;+\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est indéfiniment dérivable et

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = \frac{(-1)^n n!}{(1+tx)^{n+1}} t^n \mathrm{e}^{-t}$$

La fonction $x \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ est continue, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ est continue par morceaux et

$$\forall (x,t) \in [0\,;+\infty[\times [0\,;+\infty[, \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leq n! t^n \mathrm{e}^{-t} = \varphi_n(t)$$

avec $\varphi_n\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable.
Par domination, on peut alors affirmer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0\,;+\infty[$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0\,;+\infty[, F^{(n)}(x) = (-1)^n n! \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

c) En particulier
$$F^{(n)}(0) = (-1)^n (n!)^2$$

Exercice 70 : [énoncé]
Considérons $f\colon (x,t) \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$ définie sur $]0\,;+\infty[\times [0\,;+\infty[$
Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$ et intégrable car
$$|f(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$$
Pour$t \in [0\,;+\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$ et
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -t\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = t^2\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$$
Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, la fonctions $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable.
La fonction $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ est continue en x, continue par morceaux en t.
Soit $[a\,;b] \subset]0\,;+\infty[$. Sur$[a\,;+\infty[\times [0\,;+\infty[$, on a
$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq \mathrm{e}^{-at}$$
avec $\varphi\colon t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$ continue par morceaux et intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Par domination sur tout compact, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$$F''(x) + F(x) = \int_0^{+\infty} t^2\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$
Enfin $F \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ car
$$|f(x)| \leq \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Exercice 71 : [énoncé]

a) $g\colon (x,t) \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}$ est définie continue en x et continue par morceaux en t sur $\mathbb{R}_+ \times [0\,;+\infty[$ avec
$$|g(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$
et φ intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Par domination, on peut affirmer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) $\frac{\partial g}{\partial x}$ existe et est continue en x et continue par morceaux en t sur $\mathbb{R}_+^* \times [0\,;+\infty[$.
Pour $x \in [a\,;b] \subset \mathbb{R}_+^*$ on a
$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \left|-\frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{e}^{-xt^2}\right| \leq \mathrm{e}^{-at^2} = \psi(t)$$
avec ψ intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Par domination sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$, on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ avec
$$f'(x) = -\int_0^{+\infty}\frac{t^2\,\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
Enfin,
$$f(x) - f'(x) = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t \underset{u=\sqrt{x}t}{=} \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

Exercice 72 : [énoncé]

a) $t \mapsto \frac{1}{1+t^3}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc $g(0)$ existe.
$u \mapsto 1/u$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ entre $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.
On peut réaliser le changement de variable $t = 1/u$ qui donne
$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \int_0^{+\infty}\frac{u\,\mathrm{d}u}{1+u^3}$$
Donc
$$2g(0) = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right]_0^{+\infty} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$
puis
$$g(0) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

b) La fonction g est paire. Pour $0 \leq x \leq x'$, on a pour tout $t \geq 0$, $\mathrm{e}^{-tx^2} \geq \mathrm{e}^{-tx'^2}$ donc g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

c) Pour $x > 0$,
$$0 \leq g(x) \leq \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2} \to 0$$
donc $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 73 : [énoncé]

a) Posons

$$g(x,t)=\frac{1}{1+x^3+t^3}$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, la fonction $t\mapsto g(x,t)$ est définie, continue sur $\mathbb{R}_+$ et $g(x,t)\underset{+\infty}{\sim}1/t^3$ donc $f(x)$ existe.

b) $u\mapsto 1/u$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme entre $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.
On peut réaliser le changement de variable $t=1/u$ qui donne

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}=\int_0^{+\infty}\frac{u\,\mathrm{d}u}{1+u^3}$$

Donc

$$2f(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+1}=\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right]_0^{+\infty}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

puis

$$f(0)=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

c) $x\mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, $t\mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$ avec

$$|g(x,t)|\leq\frac{1}{1+t^3}=\varphi(t)$$

et φ intégrable sur $[0\,;+\infty[$ donc f est continue.
Si $x\leq y$ alors $\forall t\in[0\,;+\infty[, g(y,t)\leq g(x,t)$ donc $f(y)\leq f(x)$. Ainsi f est décroissante.
Rq : On peut aussi montrer f de classe $\mathcal{C}^1$ mais cela alourdit la démonstration

d) f tend vers 0 en $+\infty$ car

$$0\leq f(x)\leq\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{x^3+t^3}\underset{t=xu}{=}\frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^3}\underset{x\to+\infty}{\to}0$$

Exercice 74 : [énoncé]

a) Posons $u\colon\mathbb{R}\times[0\,;\pi]\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$u(x,\theta)=\cos(x\sin\theta)$$

La fonction u admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,\theta)=-\sin\theta\sin(x\sin\theta)\text{ et }\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\theta)=-\sin^2\theta\cos(x\sin\theta)$$

Pour chaque $x\in\mathbb{R}$, $\theta\mapsto u(x,\theta)$ et $\theta\mapsto\frac{\partial u}{\partial x}(x,\theta)$ sont continues par morceaux sur $[0\,;\pi]$ donc intégrable.
De plus $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est continue en x et continue par morceaux en θ et

$$\forall x\in\mathbb{R},\forall\theta\in[0\,;\pi],\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\theta)\right|\leq 1=\varphi(\theta)$$

L'application φ étant intégrable sur $[0\,;\pi]$, on peut affirmer par domination sur tout segment que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ avec

$$f'(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\sin(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\text{ et }f''(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

b) On remarque

$$f''(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos^2\theta-1)\cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

et donc

$$x(f''(x)+f(x))=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\theta.\,(x\cos\theta\cos(x\sin\theta))\,\mathrm{d}\theta$$

Par intégration par parties, on obtient

$$x(f''(x)+f(x))=-f'(x)$$

On en déduit que f est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2

$$xy''(x)+y'(x)+xy(x)=0$$

c) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on peut écrire

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\sin\theta)^{2n}x^{2n}\,\mathrm{d}\theta$$

Puisque la série $\sum\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ est convergente, un argument de convergence normale permet une intégration terme à terme et donc

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^{2n}\text{ avec }a_n=\frac{(-1)^n}{(2n)!\pi}\int_0^{\pi}(\sin\theta)^{2n}\,\mathrm{d}\theta$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

d) Nous pourrions calculer l'intégrale définissant a_n car c'est une intégrale de Wallis, mais puisqu'on nous demande d'exploiter l'équation différentielle...
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, par dérivation d'une série entière

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+2)a_{n+1}x^{2n+1} \text{ et } f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+2)(2n+1)a_{n+1}x^{2n}$$

L'équation $xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0$ donne alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left((2n+2)^2 a_{n+1} + a_n\right) x^{2n+1} = 0$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière de rayon de convergence > 0, on obtient

$$(2n+2)^2 a_{n+1} + a_n = 0$$

Sachant $a_0 = 1$, on conclut

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}$$

Exercice 75 : [énoncé]

a) Introduisons $g(x,t) = \frac{\cos t}{t+x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times [0\,;\pi/2]$.
La fonction g est continue et x et continue par morceaux en t.
Pour $[a\,;b] \subset \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\forall (x,t) \in [a\,;b] \times [0\,;\pi/2], |g(x,t)| \leq \frac{1}{t+a} = \varphi(t)$$

La fonction φ est intégrable sur $[0\,;\pi/2]$.
Par domination sur tout segment, on peut affirmer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Aussi, pour $0 < x \leq x'$, on a

$$\forall t \in [0\,;\pi/2], g(x',t) \leq g(x,t)$$

En intégrant, on obtient $f(x') \leq f(x)$. La fonction f est donc décroissante.
On aurait pu aussi établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et étudier le signe de sa dérivée.

b) Quand $x \to +\infty$,

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t \to 0$$

Quand $x \to 0^+$

$$f(x) \geq \int_0^{\pi/4} \frac{\cos t}{t+x}\,\mathrm{d}t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\ln(t+x)\right]_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{x+\pi/4}{x} \to +\infty$$

c)

$$\frac{1}{x+\pi/2}\int_0^{\pi/2} \cos t\,\mathrm{d}t \leq f(x) \leq \frac{1}{x}\int_0^{\pi/2} \cos t\,\mathrm{d}t$$

donc

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

On sait :

$$\forall 0 \leq t \leq \pi/2, 1 - \frac{1}{2}t^2 \leq \cos t \leq 1$$

donc

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{t+x} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t+x} \leq f(x) \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{t+x}$$

Or

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{t+x} = \ln\frac{x+\pi/2}{x} \underset{0}{\sim} -\ln x$$

et

$$0 \leq \int_0^{\pi/2} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t+x} \leq \int_0^{\pi/2} t\,\mathrm{d}t = C = \mathrm{o}(\ln x)$$

donc

$$f(x) \underset{x\to0}{\sim} -\ln x$$

Exercice 76 : [énoncé]

a) La fonction $t \mapsto (\sin t)^x$ est définie, continue et positive sur $]0\,;\pi/2]$.
Quand $t \to 0^+$, $(\sin t)^x \sim t^x$ avec $x > -1$ donc $t \mapsto (\sin t)^x$ est intégrable sur $]0\,;\pi/2]$.
Ainsi f est définie et positive sur $]-1\,;+\infty[$

b) La fonction

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \ln(\sin t)(\sin t)^x$$

est définie, continue en x et continue par morceaux en t.
Soit $[a\,;b] \subset]-1\,;+\infty[$. Sur $[a\,;b] \times]0\,;\pi/2]$

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq |\ln(\sin t)(\sin t)^a| = \varphi(t)$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

avec φ est intégrable sur $]0\,;\pi/2]$ car pour α tel que $-a<\alpha<1$,

$$t^\alpha\varphi(t)\sim t^{a+\alpha}\,|\ln(t)|\to 0$$

Par domination sur tout segment, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1\,;+\infty[$ et

$$f'(x)=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)(\sin t)^x\,\mathrm{d}t\leq 0$$

Ainsi la fonction f est décroissante.

c) En intégrant par parties

$$f(x+2)=\int_0^{\pi/2}(\sin t)^x(1-\cos^2 t)\,\mathrm{d}t=f(x)-\left[\frac{(\sin t)^{x+1}}{x+1}\cos t\right]_0^{\pi/2}-\frac{1}{x+1}f(x+2)$$

et donc

$$f(x+2)=\frac{x+1}{x+2}f(x)$$

d) On a

$$\varphi(x+1)=(x+1)f(x+1)f(x)=xf(x-1)f(x)=\varphi(x)$$

et

$$\varphi(1)=f(0)f(1)=\pi/2$$

donc par récurrence

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\varphi(n)=\pi/2$$

e) φ est continue et quand $x\to 0$,

$$\varphi(x)=\varphi(1+x)\to\varphi(1)=\pi/2$$

Or quand $x\to 0$,

$$f(x)\to f(0)=\pi/2$$

donc quand $x\to -1$,

$$f(x)=\frac{\varphi(x+1)}{(x+1)f(x+1)}\sim\frac{1}{x+1}$$

Rq : En fait on peut montrer que φ est une fonction constante.

Exercice 77 : [énoncé]

a) Posons $u(x,t)=(\sin t)^x$ définie sur $\mathbb{R}\times]0\,;\pi/2]$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;\pi/2]$.
On a

$$u(x,t)\underset{t\to 0^+}{\sim}t^x$$

donc $t\mapsto u(x,t)$ est intégrable sur $]0\,;\pi/2]$ si, et seulement si, $x>-1$.
De plus, la fonction $t\mapsto u(x,t)$ est positive et donc la convergence de l'intégrale équivaut à l'intégrabilité de la fonction.
En conclusion, l'intégrale existe si, et seulement si, $x>-1$.

b) u admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=\ln(\sin t)(\sin t)^x$$

Celle-ci est continue en x et continue par morceaux en t.
Pour $[a\,;b]\subset]-1\,;+\infty[$, on a

$$\forall(x,t)\in[a\,;b]\times]0\,;\pi/2],\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|\leq|\ln(\sin t)|\,(\sin t)^a=\varphi(t)$$

La fonction φ est intégrable car

$$\varphi(t)\underset{t\to 0^+}{\sim}|\ln t|\,|t^a|=\mathrm{o}\left(t^\alpha\right)\ \text{avec}\ \alpha\in]-1\,;a[$$

Par domination sur tout segment, on obtient f de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$f'(x)=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)(\sin t)^x\,\mathrm{d}t\leq 0$$

c) Posons

$$\varphi(x)=(x+1)f(x)f(x+1)$$

Une intégration par parties avec

$$u'(t)=\sin t\ \text{et}\ v(t)=(\sin t)^{x-1}$$

donne

$$\int_0^{\pi/2}(\sin t)^x\,\mathrm{d}t=(x-1)\left(\int_0^{\pi/2}(\sin t)^{x-2}\,\mathrm{d}t-\int_0^{\pi/2}(\sin t)^x\,\mathrm{d}t\right)$$

On en déduit

$$\varphi(x+1)=\varphi(x)$$

Montrons que cette fonction est en fait constante.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Soit $a \in]-1\,;0[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(a+n) = \varphi(a)$.
En posant $p = \lfloor a \rfloor$, la décroissance de f donne

$$\varphi(a) = \varphi(a+n) \leq (a+n+1)f(p+n)f(p+n+1)$$

Or

$$(p+n+1)f(p+n)f(p+n+1) = \varphi(p+n) = \varphi(0)$$

et donc

$$(a+n+1)f(p+n)f(p+n+1) = \frac{a+n+1}{p+n+1}\varphi(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(0)$$

De façon semblable, $\varphi(a)$ peut être minorée par une suite de limite $\varphi(0)$.
On peut donc affirmer que φ est constante.

Exercice 78 : [énoncé]
Étudions la fonction donnée par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2}$$

Notons $u(x,t) = \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2}$ définie sur $\mathbb{R}_+ \times]0\,;+\infty[$
$t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ pour chaque $x \in \mathbb{R}_+$
$x \mapsto u(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour chaque $t \in]0\,;+\infty[$ et

$$|u(x,t)| \leq \frac{\pi/2}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ fonction intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
On en déduit que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
$x \mapsto u(x,t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour chaque $t \in]0\,;+\infty[$ et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{(t^2+x^2)(1+t^2)}$$

$x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ pour chaque $t \in]0\,;+\infty[$
$t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ pour chaque $x \in \mathbb{R}_+^*$ et

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{1}{2x}\frac{1}{(1+t^2)}$$

car $2tx \leq x^2+t^2$.

Soit $[a\,;b] \subset]0\,;+\infty[$

$$\forall (x,t) \in [a\,;b] \times]0\,;+\infty[, \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{1}{2a}\frac{1}{(1+t^2)} = \psi(t)$$

avec ψ fonction intégrable.
Par domination sur tout segment, on obtient f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ avec

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+x^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

Pour $x \neq 1$, on peut décomposer la fraction rationnelle définissant l'intégrande

$$\frac{t}{(1+t^2)(x^2+t^2)} = \frac{t}{(x^2-1)(1+t^2)} - \frac{t}{(x^2-1)(x^2+t^2)}$$

et on obtient alors

$$f'(x) = \frac{1}{x^2-1}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t^2}{x^2+t^2}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\ln x}{(x^2-1)}$$

Cette identité se prolonge en $x=1$ par un argument de continuité.
On a alors

$$\int_0^x \frac{\ln t}{(t^2-1)}\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^x \frac{\ln t}{(t^2-1)}\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0} f(x) - f(\varepsilon)$$

Or $f(0) = 0$ et par continuité on parvient à

$$\int_0^x \frac{\ln t}{(t^2-1)}\,\mathrm{d}t = f(x)$$

Exercice 79 : [énoncé]

a) Pour $a > -1$, on note $\Omega_a = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geq a\}$.
$t \mapsto \frac{t^z}{1+t}$ est continue par morceaux sur $]0\,;1]$, $z \mapsto \frac{t^z}{1+t}$ est continue sur Ω et pour $z \in \Omega_a$,

$$\left|\frac{t^z}{1+t}\right| \leq \frac{t^a}{1+t} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0\,;1]$ car $\varphi(t) \sim t^a$ quand $t \to 0^+$.
Par domination, on peut affirmer que f est définie et continue sur Ω_a.
Ceci valant pour tout $a > -1$, on peut encore affirmer que f est définie et continue sur Ω.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

b) On observe

$$f(x)+f(x+1)=\int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x+1}$$

et par continuité

$$f(x+1)\underset{x\to -1}{\longrightarrow} f(0)$$

donc

$$f(x)\underset{x\to -1}{\sim}\frac{1}{x+1}$$

c) Par intégration par parties

$$(z+1)f(z)=\frac{1}{2}+\int_0^1\frac{t^{z+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\left|\int_0^1\frac{t^{z+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\right|\leq\int_0^1\left|t^{z+1}\right|\mathrm{d}t$$

avec

$$\left|t^{z+1}\right|=|\exp((z+1)\ln t|=\exp\left((\mathrm{Re}(z)+1)\ln t\right)=t^{\mathrm{Re}(z)+1}$$

car les exponentielles imaginaires sont de module 1.
On a alors

$$\left|\int_0^1\frac{t^{z+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\right|\leq\int_0^1 t^{\mathrm{Re}(z)+1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\mathrm{Re}(z)+2}\underset{\mathrm{Re}(z)\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

Ainsi

$$(z+1)f(z)\underset{\mathrm{Re}(z)\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}$$

puis

$$f(z)\underset{\mathrm{Re}(z)\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2z}$$

Exercice 80 : [énoncé]

a) Pour $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto\frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t-1}$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$,

$$\frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t-1}\underset{t\to 0}{=}\mathrm{O}(1)\text{ et }\frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t-1}\underset{t\to+\infty}{=}\mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

donc $f(x)$ est bien définie pour tout $x\in\mathbb{R}$.

b) Posons $g(x,t)=\frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t-1}$.
g admet une dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial x}$ avec

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)=\frac{t}{\mathrm{e}^t-1}\cos(xt)$$

$x\mapsto\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, $t\mapsto\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
Enfin $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leq\frac{t}{\mathrm{e}^t-1}=\varphi(t)$ avec φ intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
Par domination, on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$, *a fortiori* continue et dérivable.

c) La décomposition

$$\frac{1}{\mathrm{e}^t-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-nt}$$

permet d'écrire

$$f(1)=\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

Par la majoration $|\sin(u)|\leq|u|$, on obtient

$$\int_0^{+\infty}\left|\sin(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\right|\leq\int_0^{+\infty}t\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n^2}$$

La série $\sum\int_{[0;+\infty[}|\sin(t)\,\mathrm{e}^{-nt}|\,\mathrm{d}t$ converge, on peut intégrer terme à terme

$$f(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\sin(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

On calcule l'intégrale sommée en considérant la partie imaginaire de

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

On obtient à terme

$$f(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 81 : [énoncé]
La fonction f est bien définie sur $]0\,;+\infty[$ et

$$xf(x) = \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Posons

$$u(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}$$

définie sur $]0\,;+\infty[\times [0\,;+\infty[$.
u admet deux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -\frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{e}^{-tx} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{e}^{-tx}$$

Pour chaque $x > 0$, les fonctions u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ sont intégrables et pour tout $[a\,;b] \subset]0\,;+\infty[$, on a la domination

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq \mathrm{e}^{-at} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable. On en déduit que la fonction

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$. Il en est de même pour f par opérations sur de telles fonctions.
Quand $x \to +\infty$,

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

donc $xf(x) \to \frac{\pi}{2}$ puis

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}$$

Étudions maintenant $f(x)$ quand $x \to 0^+$.
Par le changement de variable $u = tx$,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{u}{x^2+u^2}\frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$$

avec

$$\varphi\colon u \mapsto \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}$$

Par intégration par parties,

$$f(x) = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+u^2)\varphi(u)\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \ln(x^2+u^2)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Pour $x \in]0\,;1]$,

$$\left|\ln(x^2+u^2)\right| \leq \left|\ln(u^2)\right| + \left|\ln(1+u^2)\right|$$

et la fonction

$$u \mapsto \left(\left|\ln(u^2)\right| + \left|\ln(1+u^2)\right|\right)\varphi'(u)$$

est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ car φ' peut être prolongée par continuité en 0 et

$$\varphi'(u) \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}$$

On en déduit

$$f(x) = -\ln x + \mathrm{O}(1) \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln x$$

Exercice 82 : [énoncé]

a) Par le changement de variable $t = ux$ (bijection de classe $\mathcal{C}^1$) on obtient

$$f(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+x^2u^2}\sqrt{1-u^2}}$$

Posons $g\colon]0\,;+\infty[\times]-1\,;1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,u) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2u^2}\sqrt{1-u^2}}$$

La fonction g est continue sur $]0\,;+\infty[\times]-1\,;1[$ et

$$|g(x,u)| \leq \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \varphi(u)$$

avec φ intégrable sur $]-1\,;1[$.
On en déduit que f est définie et continue sur $]0\,;+\infty[$.

b) Quand $x \to 0^+$

$$g(x,u) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2u^2}\sqrt{1-u^2}} \to \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Par la domination précédente

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = [\arcsin u]_{-1}^{1} = \pi$$

De même, on obtient

$$f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} \int_{-1}^{1} 0\,\mathrm{d}u = 0$$

Exercice 83 : [énoncé]

a) Puisque

$$\frac{\cos^2 t}{t} \sim \frac{1}{t} \text{ quand } t \to 0^+$$

on peut affirmer, par équivalence de fonctions positives, que l'intégrale diverge en 0.
On peut alors conclure que f est définie sur $]0\,;+\infty[$ (car l'intégrale sur un segment d'une fonction continue converge) mais ne peut pas être définie sur un domaine plus grand.

b) Posons

$$g(x) = \int_1^x \frac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Cette fois-ci

$$\frac{\sin^2 t}{t} \sim t \text{ quand } t \to 0^+$$

et donc la fonction g est définie et continue en 0.
Puisque

$$f(x) + g(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln x$$

on peut conclure

$$f(x) \sim \ln x \text{ quand } x \to 0^+$$

Aussi

$$f(x) = \int_1^x \frac{1+\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln x + \int_1^x \frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t$$

Comme la nouvelle intégrale converge en $+\infty$ (cela s'obtient par une intégration par parties) on conclut

$$f(x) \sim \frac{1}{2}\ln x \text{ quand } x \to +\infty$$

Exercice 84 : [énoncé]

a) Pour que la racine carrée soit définie pour $t \in]0\,;1[$, il est nécessaire que $x \in [-1\,;1]$.
Pour $x \in]-1\,;1[$, l'intégrale définissant f converge par les arguments d'intégrabilité suivant

$$\frac{1}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}} \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{C^{te}}{\sqrt{1-t}}$$

Pour $x = \pm 1$, l'intégrale définissant f diverge car

$$\frac{1}{\sqrt{t(1-t)(1-t)}} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{1-t} \geq 0$$

L'ensemble de définition de f est donc $]-1\,;1[$.

b) Sur $[0\,;1[$, la fonction f est croissante et admet donc une limite en 1^-.
Par l'absurde, si celle-ci est finie égale à $\ell \in \mathbb{R}$ alors

$$\forall a \in [0\,;1[, \int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}} \leq \ell$$

Par intégration sur un segment, la fonction de x déterminée par le premier membre est continue en $x = 1$, on en déduit

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1-t)} \leq \ell$$

Or ceci est absurde car par non intégrabilité d'une fonction positive

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1-t)} \underset{a\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$$

Exercice 85 : [énoncé]

a) La fonction $x \mapsto 1/x^\alpha(1+x)$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ avec

$$\frac{1}{x^\alpha(1+x)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x^\alpha} \text{ et } \frac{1}{x^\alpha(1+x)} \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha+1}}$$

Cette fonction est donc intégrable si, et seulement si, $\alpha \in]0\,;1[$.
La fonction intégrée étant de surcroît positive, l'intégrale définissant $f(\alpha)$ converge si, et seulement si, $\alpha \in]0\,;1[$.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

b) On a
$$f(\alpha) - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha+1}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha+1}(1+x)}$$
Or
$$\left|\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha+1}(1+x)}\right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)} = C$$
et pour $\alpha \leq 1/2$
$$\left|\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)}\right| \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)} = C'$$
On a donc
$$f(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha+1}} + \mathrm{O}(1) = \frac{1}{\alpha} + \mathrm{O}(1) \sim \frac{1}{\alpha}.$$
On peut aussi obtenir cet équivalent en commençant par opérer le changement de variable $u = x^\alpha$.

c) Par le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $x = 1/t$, on obtient $f(\alpha) = f(1-\alpha)$ d'où la symétrie affirmée.

d) Posons
$$u(\alpha, x) = \frac{1}{x^\alpha(1+x)}$$
Pour chaque $x \in]0\,;+\infty[$, la fonction $\alpha \mapsto u(\alpha,x)$ est continue et pour chaque $\alpha \in]0\,;1[$ la fonction $x \mapsto u(\alpha,x)$ est continue par morceaux. Enfin pour $\alpha \in [a\,;b] \in]0\,;1[$ (avec $a>0$), on a
$$|u(x,\alpha)| \leq \frac{1}{x^a(1+x)} \text{ si } x \in [1\,;+\infty[$$
et
$$|u(x,\alpha)| \leq \frac{1}{x^b(1+x)} \text{ si } x \in]0\,;1]$$
Ainsi
$$|u(x,\alpha)| \leq \varphi_{a,b}(x) \text{ pour } x \in]0\,;+\infty[$$
en posant $\varphi_a(x) = u(a,x) + u(b,x)$ qui est intégrable.
Par domination sur tout segment, on peut affirmer que f est continue sur $]0\,;1[$.

e) Par le changement de variable $x = 1/t$, on peut écrire
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-\alpha}(1+t)}$$
et alors
$$f(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{1-\alpha}+x^\alpha}{x(1+x)}\,\mathrm{d}x$$
On vérifie que pour $x \geq 1$, la fonction $\alpha \mapsto x^{1-\alpha}+x^\alpha$ est décroissante sur $]0\,;1/2]$ puis croissante sur $[1/2\,;1[$. La fonction f a donc la même monotonie et son minimum est donc
$$f(1/2) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t)} = \pi$$
via le changement de variable $u = \sqrt{t}$.

Exercice 86 : [énoncé]

a) Posons $f(x,t) = \frac{\ln t}{t+x}$.
f est définie et continue sur $]0\,;+\infty[\times]0\,;1]$.
Pour $x>0$, $f(x,t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}\ln t$ donc $\sqrt{t}f(x,t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ puis $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0\,;1]$.
Ainsi F est définie sur $]0\,;+\infty[$.
f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{\ln t}{(t+x)^2}$.
Soit $[a\,;b] \subset]0\,;+\infty[$. Pour $x \in [a\,;b]$,
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{|\ln t|}{a^2} = \varphi(t)$$
avec φ intégrable sur $]0\,;1]$.
Par domination sur tout segment, on peut affirmer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et
$$F'(x) = \int_0^1 -\frac{\ln t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t$$

b) Par intégration par parties,
$$F'(x) = \left[\ln t\left(\frac{1}{t+x} - \frac{1}{x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{t}\left(\frac{1}{t+x} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}t$$
où la primitive de $t \mapsto \frac{1}{t+x}$ est choisie de sorte de s'annuler en 0 pour que l'intégration par parties présente deux convergences.
Ainsi
$$F'(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t(t+x)} = \frac{\ln(x+1) - \ln x}{x}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Par opérations

$$G'(x) = \frac{\ln(x+1) - \ln x}{x} - \frac{\ln(1+1/x) + \ln x}{x} = -\frac{1}{x}\ln x$$

puis

$$G(x) = G(1) - \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

Or $G(1) = 2F(1)$ avec

$$F(1) = \int_0^1 \frac{\ln t}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t$$

Or $\int_0^1 t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{(k+1)^2}$ donc par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, $F(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Sachant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, on obtient $F(1) = -\frac{\pi^2}{12}$ puis

$$G(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \frac{\pi^2}{6}$$

c) Par décomposition en éléments simples

$$\frac{t-1}{(t+1)(t^2+2t\operatorname{ch}\theta+1)} = \frac{\frac{1}{\operatorname{ch}\theta-1}}{t+1} - \frac{\frac{1}{\operatorname{ch}\theta-1}(t+\operatorname{ch}\theta)}{t^2+2t\operatorname{ch}\theta+1}$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{t-1}{t+1}\frac{\ln t}{t^2+2t\operatorname{ch}(\theta)+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\operatorname{ch}\theta-1}(F(1) - \frac{1}{2}G(\mathrm{e}^\theta)) = \frac{\theta^2}{4(\operatorname{ch}(\theta)-1)}$$

Exercice 87 : [énoncé]

a) Par le changement de variable $t = xu$,

$$g(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sin(xu)}{1+u}\,\mathrm{d}u$$

L'application $f\colon (x,u) \mapsto \frac{\sin(xu)}{1+u}$ est définie et continue sur $]0\,;+\infty[\times [0\,;1]$ et

$$|f(x,u)| \leq 1 = \varphi(u)$$

avec φ intégrable sur $[0\,;1]$.
Par domination, on peut conclure que g est définie et continue sur $]0\,;+\infty[$.

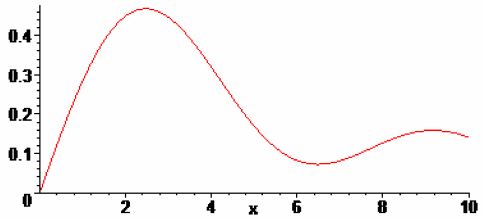

FIGURE 1 – L'allure de la fonction g

b) Puisque

$$\forall u \in [0\,;1], \frac{\sin(xu)}{1+u} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

on peut affirmer, toujours par domination, que

$$g(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \int_0^1 0\,\mathrm{d}u = 0$$

La même technique ne s'applique par pour l'étude en $+\infty$. On va alors transformer l'écriture de l'intégrale. Par intégration par parties

$$g(x) = \left[-\frac{\cos(t)}{x+t}\right]_0^x - \int_0^x \frac{\cos(t)}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Le terme entre crochet tend vers 0 quand $x \to +\infty$ et le terme intégrale aussi car

$$\left|\int_0^x \frac{\cos(t)}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{x^2} = \frac{1}{x}$$

Ainsi

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Exercice 88 : [énoncé]
Considérons $f\colon (x,t) \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}$ définie sur $]0\,;+\infty[\times [0\,;+\infty[$
Pour $t \in [0\,;+\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$ f admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -t\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0\,;+\infty[$ car

$$t^2 f(x,t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

De plus
$\forall x \in]0\,;+\infty[$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux.
$\forall t \in [0\,;+\infty[$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue.
Enfin, pour $[a\,;b] \subset [0\,;+\infty[$. On a

$$\forall (x,t) \in [a\,;b]\times[0\,;+\infty[, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \mathrm{e}^{-at}$$

avec $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$ continue par morceaux et intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Par domination sur tout segment, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$-g'(x)+g(x) = \int_0^{+\infty} t\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

On peut aussi constater le résultat plus directement en procédant aux changements de variable $u = 1+t$ puis $v = ux$ ce qui ramène l'expression étudiée à une primitive

$$g(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-v}}{v}\,\mathrm{d}v$$

et on peut alors vérifier la satisfaction de l'équation différentielle.

Exercice 89 : [énoncé]

a) L'application $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}t^x$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;1[$.
Quand $t \to 0^+$,

$$\frac{t-1}{\ln t}t^x = \mathrm{o}\left(t^x\right)$$

Quand $t \to 1^-$,

$$\frac{t-1}{\ln t}t^x \to 1$$

L'application $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}t^x$ est donc intégrable sur $]0\,;1[$
Donc g est bien définie.

b) Posons $f(x,t) = \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{e}^{x\ln t}$.
$\forall x > -1$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0\,;1[$ comme vu ci-dessus.
La fonction f admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = (t-1)\,\mathrm{e}^{x\ln t}$$

$\forall x > -1, t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;1[$,
$\forall t \in]0\,;1[, x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]-1\,;+\infty[$.
Pour $[a\,;b] \subset]-1\,;+\infty[$

$$\forall (x,t) \in [a\,;b]\times]0\,;1[, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq (1-t)t^a = \varphi_a(t)$$

avec φ_a continue par morceaux et intégrable.
Par domination sur tout segment, on peut affirmer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1\,;+\infty[$ et

$$g'(x) = \int_0^1 (t-1)t^x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

c) Par intégration

$$g(x) = \ln\frac{x+2}{x+1} + C$$

Étudions $C = \lim_{x\to+\infty} g(x)$.
La fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$ peut être prolongée par continuité sur $[0\,;1]$, elle y est donc bornée par un certain M et alors

$$0 \leq g(x) \leq \int_0^1 Mt^x\,\mathrm{d}x = \frac{M}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit $C = 0$.

Exercice 90 : [énoncé]
Posons

$$u(x,t) = \frac{t-1}{\ln t}t^x$$

définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R}\times]0\,;1[$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;1[$.
Puisque

$$u(x,t) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{t^x}{\ln t} \text{ et } u(x,t) \underset{t\to1^-}{\longrightarrow} 1$$

la fonction $t \mapsto u(x,t)$ est intégrable sur $]0\,;1[$ si, et seulement si, $x > -1$.
De plus, cette fonction est positive et donc la convergence de l'intégrale équivaut à l'intégrabilité de la fonction intégrande.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

On en déduit que la fonction f est définie sur $]-1\,;+\infty[$.
La fonction u admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = (t-1)t^x$$

Cette dérivée partielle est continue en x et continue par morceaux en t.
Pour $[a\,;b] \subset]-1\,;+\infty[$, on a

$$\forall (x,t) \in [a\,;b]\times]0\,;1[, \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \leq (1-t)t^a$$

Par domination sur tout segment, on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1\,;+\infty[$ avec

$$f'(x) = \int_0^1 (t-1)t^x \,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

On en déduit

$$f(x) = \ln\frac{x+2}{x+1} + C$$

La fonction

$$t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$$

est continue sur $]0\,;1[$ et se prolonge par continuité en 0 et 1, elle est donc bornée par un certain $M \in \mathbb{R}_+$ et alors

$$|f(x)| \leq \int_0^1 Mt^x \,\mathrm{d}t = \frac{M}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit $C = 0$ puis finalement

$$f(x) = \ln\frac{x+2}{x+1}$$

Exercice 91 : [énoncé]

a) Considérons $f\colon (x,t) \mapsto \frac{t^x-1}{\ln t}$ définie sur $]-1\,;+\infty[\times]0\,;1[$.
Soit $x > -1$. La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;1[$.
Quand $t \to 1^-$.
$t = 1-h$ avec $h \to 0^+$.

$$f(x,t) = \frac{(1+h)^x - 1}{\ln(1+h)} \to x$$

et donc f est intégrable sur $[1/2\,;1[$.
Quand $t \to 0^+$.
On a

$$t^x \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x \in]-1\,;0[\end{cases}$$

Si $x \geq 0$, on obtient $f(x,t) \to 0$ ce qui permet un prolongement par continuité.
Si $x < 0$, on a $f(x,t) = \mathrm{o}\left(t^x\right) = \mathrm{o}\left(1/t^{-x}\right)$ avec $-x < 1$.
Dans les deux cas, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0\,;1/2]$.
Finalement $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0\,;1[$ et donc g est définie sur $]-1\,;+\infty[$.

b) La fonction $x \mapsto f(x,t) = \frac{t^x-1}{\ln t}$ est dérivable donc f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = t^x$$

$\forall x \in]-1\,;+\infty[$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;1[$
$\forall t \in]0\,;1[$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]-1\,;+\infty[$.
Soit $[a\,;b] \subset]-1\,;+\infty[$. Pour $x \in [a\,;b]$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq t^a = \varphi(t)$$

avec $\varphi\colon]0\,;1[\to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur $]0\,;1[$.
Par domination sur tout segment, g est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$g(x) = \int_0^1 t^x \,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+1}$$

On en déduit

$$g(x) = g(0) + \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln(1+x)$$

Exercice 92 : [énoncé]

a) Posons $g(x,t) = \frac{\sin xt}{t}\,\mathrm{e}^{-t}$ définie sur $\mathbb{R}\times]0\,;+\infty[$.
$t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$, se prolonge par continuité en 0 et est négligeable devant $t \mapsto 1/t^2$ en $+\infty$ donc la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

$\frac{\partial g}{\partial x}$ est définie sur $\mathbb{R}\times]0\,;+\infty[$, $t\mapsto\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$, $x\mapsto\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x>0$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|=\left|\cos(xt)\,\mathrm{e}^{-t}\right|=\mathrm{e}^{-t}=\psi(t)$$

avec ψ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par domination F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$F'(x)=\int_0^{+\infty}\cos(xt)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

b) $\cos(xt)\,\mathrm{e}^{-t}=\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}x)t})$ donc

$$\int_0^{+\infty}\cos(xt)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}x)t}\,\mathrm{d}t\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-\mathrm{i}.x}\right)=\frac{1}{1+x^2}$$

c) Sachant $F(0)=0$, on obtient $F(x)=\arctan(x)$.

Exercice 93 : [énoncé]
La fonction $u(x,t)=\mathrm{e}^{(ix-1)t}/\sqrt{t}$ définie sur $\mathbb{R}\times]0\,;+\infty[$.
$t\mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ pour chaque $x\in\mathbb{R}$ et

$$u(x,t)\underset{t\to0^+}{\sim}\frac{1}{\sqrt{t}}\text{ et }t^2u(x,t)\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

On en déduit que la fonction donnée par

$$F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{(ix-1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=f(x)+ig(x)$$

est définie sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x\mapsto u(x,t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour chaque $t\in]0\,;+\infty[$ et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=i\sqrt{t}\,\mathrm{e}^{(ix-1)t}$$

$x\mapsto\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour chaque $t\in]0\,;+\infty[$,
$t\mapsto\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ pour chaque $x\in\mathbb{R}$ et

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|=\sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-t}=\varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0\,;+\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et vérifiant $t^2\varphi(t)\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$.
Par domination, on peut affirmer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$F'(x)=\int_0^{+\infty}\sqrt{t}\,\mathrm{e}^{(ix-1)t}\,\mathrm{d}t$$

À l'aide d'une intégration par parties, on obtient

$$F'(x)=-\frac{1}{2(x+i)}F(x)$$

La résolution de cette équation différentielle donne

$$F(x)=F(0)\frac{\mathrm{e}^{i(\arctan x)/2}}{(x^2+1)^{1/4}}$$

Enfin, sachant

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

on parvient à

$$F(x)=\frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{i(\arctan x)/2}}{(x^2+1)^{1/4}}$$

d'où les expressions de $f(x)$ et de $g(x)$.

$$f(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{(x^2+1)^{1/4}}\cos\left(\frac{\arctan x}{2}\right)\text{ et }g(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{(x^2+1)^{1/4}}\sin\left(\frac{\arctan x}{2}\right)$$

On peut encore éventuellement « simplifier » en exploitant

$$\cos x=\sqrt{\frac{1+\cos(2x)}{2}}\text{ pou }x\in[-\pi/2\,;\pi/2]$$

ce qui donne

$$\cos\left(\frac{\arctan x}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2}}$$

et aussi

$$\sin\left(\frac{\arctan x}{2}\right)=\mathrm{signe}(x)\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2}}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 94 : [énoncé]
$f\colon (x,t) \to \frac{\mathrm{e}^{-xt}-\mathrm{e}^{-yt}}{t}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\mathrm{e}^{-xt}$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
$t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$.
Pour $a > 0$,

$$\forall x \in [a\,;+\infty[\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \mathrm{e}^{-at} = \varphi_a(t)$$

avec φ_a intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par domination $x \mapsto F(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \int_0^{+\infty} -\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{x}$$

Donc $F(x,y) = -\ln x + C^{te}$ et puisque pour $x = y$, on a $F(x,y) = 0$ on obtient

$$F(x,y) = \ln y - \ln x$$

Exercice 95 : [énoncé]

a) Posons

$$\varphi\colon t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}}{t}$$

La fonction φ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et vérifiant $t^2\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par domination, on obtient que F est définie sur $I = \mathbb{R}$.

b) Posons $f(x,t) = \varphi(t)\cos(xt)$.
f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})\sin(xt)$$

$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ et $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t} = \psi(t)$ avec ψ intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
On en déduit que F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} -(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})\sin(xt)\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\sin(xt)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-a+ix)t}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{x}{a^2+x^2}$$

donc

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4+x^2}{1+x^2}\right) + C^{te}$$

Montrons que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ quand $x \to +\infty$.
Par intégration par parties

$$F(x) = \left[\varphi(t)\frac{\sin(xt)}{x}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \varphi'(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$$

On en déduit

$$|F(x)| \leq \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Par suite $C^{te} = 0$ puis

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{4+x^2}{1+x^2}$$

Exercice 96 : [énoncé]
On définit $f\colon \mathbb{R}\times]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$f(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\cos(xt)$$

a) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
Quand $t \to +\infty$, $t^2 f(x,t) \to 0$ et quand $t \to 0^+$, $f(x,t) \to b-a$ donc $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

b) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (\mathrm{e}^{-bt}-\mathrm{e}^{-at})\sin(xt)$$

La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}\times]0\,;+\infty[$ et

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \mathrm{e}^{-at}+\mathrm{e}^{-bt} = \varphi(t)$$

avec φ fonction intégrable.
On en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} (\mathrm{e}^{-bt}-\mathrm{e}^{-at})\sin(xt)\,\mathrm{d}t$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Or

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ct}\sin(xt)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-c+ix)t}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{x}{c^2+x^2}$$

donc

$$F'(x) = \frac{x}{x^2+b^2} - \frac{x}{x^2+a^2}$$

c) On en déduit

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2}\right) + C^{te}$$

Pour déterminer la constante, on étudie la limite de F en $+\infty$. Posons

$$\psi(t) = \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}$$

ce qui définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable ainsi que sa dérivée sur $]0\,;+\infty[$.
Par intégration par parties généralisée justifiée par deux convergences

$$\int_0^{+\infty} \psi(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[\psi(t)\sin(xt)\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \psi'(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$\left|\int_0^{+\infty} \psi(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} |\psi'(t)|\,\mathrm{d}t \to 0$$

On peut conclure

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2}\right)$$

Exercice 97 : [énoncé]

a) On réalise le changement de variable $u = \sqrt{t}$. On obtient $z(0) = \sqrt{\pi}$.

b) $t \mapsto g(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}x)t}}{\sqrt{t}}$ est définie, continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ et intégrable.
g admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \mathrm{i}\sqrt{t}\,\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}x)t}$$

$t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$,

$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
La fonction z est donc définie et de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$z'(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{i}.\sqrt{t}\,\mathrm{e}^{(-1+i.x)t}\,\mathrm{d}t \underset{\text{ipp}}{=} \frac{i}{2(1-\mathrm{i}x)}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{(-1+i.x)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2(x+\mathrm{i})}z(x)$$

c)

$$\frac{-1}{2(x+\mathrm{i})} = \frac{-x+i}{2(x^2+1)} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{i}{2(x^2+1)}$$

donc

$$z(x) = C\exp\left(\mathrm{i}\frac{\arctan x}{2} - \frac{1}{4}\ln(x^2+1)\right) = \frac{C\,\mathrm{e}^{i(\arctan x)/2}}{(x^2+1)^{1/4}}$$

Puisque $z(0) = \sqrt{\pi}$, on conclut

$$z(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{i(\arctan x)/2}}{(x^2+1)^{1/4}}$$

Exercice 98 : [énoncé]
Posons

$$f(x,t) = \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{tx}$$

La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ car

$$t^2 f(x,t) \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$$

et donc la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{tx}$$

La fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est continue par morceaux, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue.
Pour $a \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\forall (x,t) \in [-a\,;a]\times\mathbb{R},\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq |t|\,\mathrm{e}^{a|t|}\mathrm{e}^{-t^2} = \varphi_a(t)$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

avec φ_a intégrable sur $\mathbb{R}$ indépendant de x.
On en déduit que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ et par une intégration par parties

$$g'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{tx}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{tx}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{tx}\,\mathrm{d}t$$

On en déduit que g est solution de l'équation différentielle

$$g'(x) - \frac{1}{2}xg(x) = 0$$

Après résolution de cette équation différentielle

$$g(x) = \lambda \mathrm{e}^{x^2/4}$$

Enfin $g(0) = \sqrt{\pi}$ donne $\lambda = \sqrt{\pi}$.

Exercice 99 : [énoncé]

a) Posons

$$f(x,t) = \mathrm{e}^{-t^2}\operatorname{ch}(2xt)$$

La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ car

$$t^2 f(x,t) \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$$

et donc la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = 2t\mathrm{e}^{-t^2}\operatorname{sh}(2xt)$$

La fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est continue par morceaux, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue.
Soit $a \in \mathbb{R}_+$.

$$\forall (x,t) \in [-a\,;a]\times\mathbb{R}, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq 2a\operatorname{sh}(2a\,|t|)\mathrm{e}^{-t^2} = \varphi_a(t)$$

avec φ_a intégrable sur $\mathbb{R}$ indépendant de x.
On en déduit que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ et par une intégration par parties

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} 2t\mathrm{e}^{-t^2}\operatorname{sh}(2xt)\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t^2}\operatorname{sh}(2xt)\right]_0^{+\infty} + 2x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\operatorname{ch}(2xt)\,\mathrm{d}t$$

On en déduit que F est solution de l'équation différentielle

$$F'(x) - 2xF(x) = 0$$

Après résolution de cette équation différentielle

$$F(x) = \lambda \mathrm{e}^{x^2}$$

avec $F(0) = \sqrt{\pi}/2$.

c) On sait

$$\forall x,t\in\mathbb{R}, \operatorname{ch}(2xt) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2n}}{(2n)!}(xt)^{2n}$$

Posons $u_n : [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$

$$u_n(t) = \frac{2^{2n}}{(2n)!}(xt)^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}$$

Les fonctions u_n sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0\,;+\infty[$ vers la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}\operatorname{ch}(2xt)$ elle-même continue par morceaux.
Chaque fonction u_n est intégrable et

$$\int_0^{+\infty}|u_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{2^{2n}\,|x|^{2n}}{(2n)!}\int_0^{+\infty} t^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Par intégration par parties

$$\int_0^{+\infty} t^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{2n-1}\times t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2n-1}{2}\int_0^{+\infty} t^{2(n-1)}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} t^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

puis

$$\int_0^{+\infty}|u_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{|x|^{2n}}{n!}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Il y a alors convergence de la série $\sum\int|u_n|$ et donc on peut intégrer terme à terme ce qui fournit

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n!}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{x^2}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 100 : [énoncé]
Posons $g(x,t)=\frac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2}$.
$x\mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
$t\mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$,
$|g(x,t)|\leq\frac{\ln(1+a^2t^2)}{1+t^2}$ sur $[-a\,;a]$ avec $t\mapsto\frac{\ln(1+a^2t^2)}{1+t^2}$ intégrable.
Par domination sur tout segment, on peut donc affirmer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Il est évident que f est paire. Nous poursuivons son étude sur $\mathbb{R}_+$.
$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{2xt^2}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$ est bien définie.
$x\mapsto\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$,
$t\mapsto\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$.
Enfin $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leq\frac{2bt^2}{(1+a^2t^2)(1+t^2)}$ sur $[a\,;b]\subset\mathbb{R}_+^*$ avec $t\mapsto\frac{2bt^2}{(1+a^2t^2)(1+t^2)}$ intégrable.
Par domination sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$, on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{2xt^2}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$
En réalisant la décomposition en éléments simples (pour $x\neq1$),
$f'(x)=\frac{\pi}{x+1}$ et cette relation est aussi valable pour $x=1$ par continuité.
Sachant que $f(0)=0$ et que f est paire, on obtient $f(x)=\pi\ln(1+|x|)$.

Exercice 101 : [énoncé]

a) Posons $f(x,t)=\ln(\cos^2(t)+x^2\sin^2(t))$ définie sur $]0\,;+\infty[\times[0\,;\pi/2]$.
Pour chaque $x>0$, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ étant continue par morceaux sur $[0\,;\pi/2]$, l'intégrale définissant $F(x)$ est bien définie.
Pour chaque $t>0$, la fonction $x\mapsto f(x,t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\frac{2x\sin^2(t)}{\cos^2(t)+x^2\sin^2(t)}$$

Soit $[a\,;b]\subset]0\,;+\infty[$.

$$\forall(x,t)\in[a\,;b]\times[0\,;\pi/2],\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leq\frac{2b}{\cos^2(t)+a^2\sin^2(t)}=\varphi_{a,b}(t)$$

avec la fonction $\varphi_{a,b}\colon[0\,;\pi/2]\to\mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable.
Par domination sur tout segment, F est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$F'(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{2x\sin^2(t)}{\cos^2(t)+x^2\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

Par le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $u=\tan t$

$$F'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{2u^2x}{(1+x^2u^2)(1+u^2)}\,\mathrm{d}u$$

Par décomposition en éléments simples (si $x\neq1$)

$$\frac{2xX}{(1+x^2X)(1+X)}=\frac{2x/(x^2-1)}{1+X}-\frac{2x/(x^2-1)}{1+x^2X}$$

et donc

$$F'(x)=\frac{2x}{x^2-1}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}-\frac{1}{1+x^2u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{x+1}$$

et la relation vaut aussi pour $x=1$ par argument de continuité.
On en déduit

$$F(x)=\pi\ln(x+1)+C^{te}$$

Sachant $F(1)=0$, on conclut

$$F(x)=\pi\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

Exercice 102 : [énoncé]
Posons

$$f(x)=\int_0^{2\pi}\frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}\,\mathrm{d}t$$

Pour $|x|>1$, l'intégrale ne peut pas être définie.
Pour $|x|\leq1$
En $t=\pi/2$ et $t=3\pi/2$, il est possible de prolonger par continuité la fonction intégrée.
Pour $x=-1$:
Quand $t\to0^+$, $\ln(1-\cos t)\sim2\ln t$
Quand $t\to2\pi^-$, $t=2\pi-h$, $\ln(1-\cos t)=\ln(1-\cos h)\sim2\ln h$
Pour $x=1$, quand $t\to\pi$,$t=\pi+h$, $\ln(1+\cos t)=\ln(1-\cos h)\sim2\ln h$.
Finalement f est définie sur $[-1\,;1]$.
Pour des raisons de symétrie,

$$f(x)=2\int_0^{\pi}\frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}\,\mathrm{d}t$$

Par domination sur $[-a\,;a]$ avec $a<1$, f est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1\,;1[$ et

$$f'(x)=2\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1+x\cos t}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Par le changement de variable $u = \tan\frac{t}{2}$,

$$f'(x) = 4\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)+x(1-u^2)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-x^2}}$$

Puisque $f(0) = 0$, on en déduit $f(x) = 2\pi \arcsin x$.

Exercice 103 : [énoncé]

a) $f(x,t) = \ln(1+x\sin^2 t)$ est définie et continue sur $[0\,;+\infty[\times [0\,;\pi/2]$.
Soit $[a\,;b] \subset [0\,;+\infty[$,

$$\forall (x,t) \in [a\,;b]\times[0\,;\pi/2], |f(x,t)| \leq \ln(1+b) = \varphi(t)$$

La fonction φ est intégrable sur $[0\,;\pi/2]$
Par domination sur tout segment, on obtient F est définie et continue sur $[0\,;+\infty[$.

b) f admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{\sin^2 t}{1+x\sin^2 t}$$

Celle-ci est continue en x et continue par morceaux en t.

$$\forall (x,t) \in [0\,;+\infty[\times[0\,;\pi/2], \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq 1 = \varphi(t)$$

La fonction φ est intégrable sur $[0\,;\pi/2]$ et donc, par domination, F est de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{1+x\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

Par le changement de variable $u = \tan t$ $\mathcal{C}^1$ strictement croissant

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{(1+u^2)(1+(x+1)u^2)}$$

Après décomposition en éléments simples et calcul,

$$F'(x) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{(1+\sqrt{x+1})\sqrt{x+1}}$$

c) On remarque que

$$\ln(1+\sqrt{1+x})' = \frac{1}{2}\frac{1}{(1+\sqrt{x+1})\sqrt{x+1}}$$

donc

$$F(x) = \pi\ln(1+\sqrt{1+x}) + C^{te}$$

sur $\mathbb{R}_+$.
Par continuité en 0 et sachant $F(0) = 0$, on parvient à conclure.

Exercice 104 : [énoncé]
$t \mapsto \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$,
$x \mapsto \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in [-a\,;a]$

$$\left|\frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\right| \leq \frac{\left|\ln(a^2+t^2)\right| + \left|\ln(t^2)\right|}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable. Par suite f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Il est immédiat que f est paire. Poursuivons, en étudiant f sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\right) = \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$$

$t \mapsto \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$ est continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$,
$x \mapsto t \mapsto \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in [a\,;b] \subset \mathbb{R}_+^*$,

$$\left|\frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}\right| \leq \frac{2b}{(a^2+t^2)(1+t^2)} = \psi(t)$$

avec ψ intégrable. Par suite f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $x \neq 1$,

$$\frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)} = \frac{2x}{x^2-1}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{x^2+t^2}\right)$$

donc

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{x+1}$$

et cette relation vaut aussi pour $x = 1$ par continuité.
En procédant au changement de variable $u = 1/t$, on obtient $f(0) = 0$ et donc on peut conclure

$$f(x) = \pi\ln(x+1)$$

pour $x \in \mathbb{R}_+$ en exploitant un argument de continuité.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 105 : [énoncé]

a) Posons

$$g(x,t)=\frac{\ln(1+2t\cos x+t^2)}{t}$$

Puisque $\cos x\geq 0$,

$$1+2t\cos x+t^2\geq 1+t^2$$

donc $t\mapsto g(x,t)$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;1]$.
De plus

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+2t\cos x+t^2)}{t}=\cos x$$

on peut donc prolonger $t\mapsto g(x,t)$ par continuité en 0. Par suite $F(x)$ est bien définie.
La dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial x}$ existe sur $[0\,;\pi/2]\times]0\,;1]$ et

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)=-\frac{2\sin x}{1+2t\cos x+t^2}$$

$t\mapsto\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;1]$,
$x\mapsto\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[0\,;\pi/2]$ et

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leq 2=\varphi(t)$$

avec φ est intégrable. Par domination F est de classe $\mathcal{C}^1$.

b) Pour $x=0$, $F'(0)=0$.
Pour $x\neq 0$,

$$F'(x)=-\int_0^1\frac{2\sin x}{1+2t\cos x+t^2}\,\mathrm{d}t=-\int_0^1\frac{2\sin x}{(t+\cos x)^2+\sin^2 x}\,\mathrm{d}t=-\left[2\arctan\frac{t+\cos x}{\sin x}\right]_0^1$$

Or

$$\arctan\frac{\cos x}{\sin x}=\arctan(\tan(\pi/2-x))$$

avec $\pi/2-x\in]-\pi/2\,;\pi/2[$ donc

$$\arctan\frac{\cos x}{\sin x}=\pi/2-x$$

et

$$\arctan\frac{1+\cos x}{\sin x}=\arctan\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}=\pi/2-x/2$$

Finalement

$$F'(x)=2((\pi/2-x)-(\pi/2-x/2))=-x$$

c)

$$F(0)=\int_0^1\frac{2\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t=2\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}t^n\,\mathrm{d}t$$

or la série de fonctions $\sum\frac{(-1)^n}{n+1}t^n$ converge uniformément sur $[0\,;1]$ puisque la série numérique satisfait au critère spécial ce qui permet d'écrire

$$|R_N(t)|\leq\frac{t^{n+1}}{n+2}\leq\frac{1}{n+2}$$

d'où $\|R_N\|_\infty\to 0$.
Par suite

$$F(0)=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

puis

$$F(x)=\frac{\pi^2}{6}-\frac{x^2}{2}$$

Exercice 106 : [énoncé]

a) Posons

$$g_n(x,t)=\frac{1}{(x^2+t^2)^n}$$

$t\to g_n(x,t)$ est définie continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et $g_n(x,t)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{t^{2n}}$ donc l'intégrale définissant $I_n(x)$ existe.

b)

$$I_1(x)=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{x^2+t^2}=\left[\frac{1}{x}\arctan\frac{t}{x}\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2x}$$

c) $\frac{\partial g_n}{\partial x}(x,t)=\frac{-2nx}{(x^2+t^2)^{n+1}}$ existe sur $]0\,;+\infty[\times[0\,;+\infty[$.
$t\mapsto\frac{\partial g_n}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$, $x\mapsto\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $0<a<b$,

$$\forall x\in[a\,;b],\left|\frac{\partial g_n}{\partial x}(x,t)\right|\leq\frac{2nb}{(a^2+t^2)^{n+1}}=\varphi_{a,b}(t)$$

avec $\varphi_{a,b}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par domination sur tout segment, I_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,;b]$ puis sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$I_n'(x)=-2nxI_{n+1}(x)$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

d) $I_n(x) = \frac{\lambda_n}{x^{2n+1}}$ avec $\lambda_1 = \frac{\pi}{2}$ et $\lambda_{n+1} = \frac{2n+1}{2n}\lambda_n$ d'où

$$\lambda_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi$$

Exercice 107 : [énoncé]

a) Posons $f : \mathbb{R} \times]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,t) = \exp\left(-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right)$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \times]0\,;+\infty[$ et

$$|f(x,t)| \leq \mathrm{e}^{-t^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
On peut donc affirmer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{2x}{t^2}\exp\left(-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right)$$

La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R} \times]0\,;+\infty[$ et pour $x \in [a\,;b] \subset]0\,;+\infty[$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{2b}{t^2}\exp\left(-\frac{a^2}{t^2}\right)\exp\left(-t^2\right) = \varphi_{a,b}(t)$$

La fonction $\varphi_{a,b}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ (notamment car de limite nulle en 0^+) donc on peut affirmer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ et

$$F'(x) = -2x\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2}\exp\left(-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right)\mathrm{d}t$$

c) Procédons au changement de variable $u = x/t$ (bijection de classe $\mathcal{C}^1$)

$$F'(x) = -2\int_0^{+\infty}\exp\left(-\left(\frac{x^2}{u^2} + u^2\right)\right)\mathrm{d}u = -2F(x)$$

d) On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x > 0, F(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-2x}$$

Puisque F est paire et continue en 0, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = F(0)\,\mathrm{e}^{-2|x|}$$

Exercice 108 : [énoncé]

a) Posons

$$f(x,t) = \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$$

est définie sur $[0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$,
$t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et égale à un $\mathrm{O}(1/t^3)$ en $+\infty$. Ainsi F est définie sur $\mathbb{R}_+$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$$

est définie sur $[0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$,
$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ et $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[0\,;+\infty[$.

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux et intégrable sur $]0\,;+\infty[$,
donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ avec

$$F'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$$

b) Pour $x \neq 1$

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)$$

d'où

$$F'(x) = \frac{x-1}{x^2-1}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(x+1)}$$

ce qui est encore valable en 1 par continuité.
Par suite

$$F(x) = \frac{\pi}{2}\ln(x+1) + C$$

avec $C = 0$ puisque $F(0) = 0$.

Exercice 109 : [énoncé]
$S \times [a\,;b]$ est compact et toute fonction continue sur un compact y est uniformément continue.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Étudions la continuité de F en $\alpha \in \mathbb{R}$ et considérons $S = [\alpha - 1\,;\alpha + 1]$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x,t),(x',t') \in S\times[a\,;b], \|(x,t)-(x',t')\|_\infty \leq \eta \implies |f(x,t)-f(x',t')| \leq \varepsilon$$

Donc pour $|x-\alpha| \leq \eta$, on a

$$|F(x)-F(\alpha)| \leq \int_a^b \varepsilon \,\mathrm{d}t = \varepsilon(b-a)$$

Ainsi F est continue en α.
$(x,t) \mapsto \mathrm{e}^{xt}$ est continue par opérations donc g l'est aussi par intégration sur un segment.
Pour $x \neq 0$, $g(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ et $g(0) = 1$.
Sans difficultés, on vérifie g est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 110 : [énoncé]
Réalisons le changement de variable $t = u(x) + \theta(v(x)-u(x))$

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t = (v(x)-u(x))\int_0^1 f(x,u(x)+\theta(v(x)-u(x)))\,\mathrm{d}\theta$$

Considérons la fonction

$$g\colon (x,\theta) \mapsto f(x,u(x)+\theta(v(x)-u(x)))$$

Pour $[a\,;b] \subset I$, la fonction g est continue sur le compact $[a\,;b]\times[0\,;1]$ et donc bornée. Par conséquent, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\forall (x,\theta) \in [a\,;b]\times[0\,;1], |g(x,\theta)| \leq M = \varphi(\theta)$$

La fonction φ est intégrable sur $[0\,;1]$ et donc, par domination sur tout segment, on peut affirmer la continuité de la fonction

$$x \mapsto \int_0^1 g(x,\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

On en déduit la continuité de la fonction étudiée par produit.

Exercice 111 : [énoncé]
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \underset{t=xu}{=} x\int_0^1 f'(xu)\,\mathrm{d}u$$

On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = \int_0^1 f'(xu)\,\mathrm{d}u$$

Posons $h(x,u) = f'(xu)$ définie sur $\mathbb{R}\times[0\,;1]$.
La fonction h admet des dérivées partielles $\frac{\partial^n h}{\partial x^n}$ à tout ordre n avec

$$\frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,u) = u^n f^{(n+1)}(xu)$$

Celles-ci sont continues en x et continues par morceaux en u.
Soit $[-a\,;a] \subset \mathbb{R}$. Puisque la fonction $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[-a\,;a]$, elle y est bornée et donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\forall (x,u) \in [-a\,;a]\times[0\,;1], \left|\frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,u)\right| \leq M = \varphi(u)$$

Puisque la fonction φ est intégrable, on peut affirmer par domination sur tout segment, que la fonction

$$x \mapsto \int_0^1 f'(xu)\,\mathrm{d}u$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\int_0^1 f'(xu)\,\mathrm{d}u\right) = \int_0^1 u^n f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u$$

On en déduit que la fonction g se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, g^{(n)}(0) = \int_0^1 u^n f^{(n+1)}(0)\,\mathrm{d}u = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$$

Exercice 112 : [énoncé]

a) On applique la formule de Taylor reste-intégrale à f en a.

b) On réalise le changement de variable $t = a + \theta(x-a)$ et l'on obtient

$$f(x) = (x-a)^\alpha \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} f^{(\alpha)}(a+\theta(x-a))\,\mathrm{d}\theta$$

Posons

$$h(x,\theta) = \frac{(1-\theta)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} f^{(\alpha)}(a+\theta(x-a))$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

La fonction h admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,\theta)=\frac{(1-\theta)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}(x-a)^k f^{(\alpha+k)}(a+\theta(x-a))$$

Celles-ci sont continues en x et continues par morceaux en θ.
Soit $[a-b\,;a+b]\subset\mathbb{R}$. La fonction $f^{(\alpha+k)}$ est continue sur ce segment et y est donc bornée par un certain M.
Puisque

$$\forall x\in[a-b\,;a+b],\forall\theta\in[0\,;1],a+\theta(x-a)\in[a-b\,;a+b]$$

on a

$$\forall(x,\theta)\in[a-b\,;a+b]\times[0\,;1],\left|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,\theta)\right|\leq M=\varphi(\theta)$$

avec φ fonction intégrable sur $[0\,;1]$.
Par domination sur tout segment, on peut affirmer que la fonction

$$g\colon x\mapsto\int_0^1\frac{(1-\theta)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}f^{(\alpha)}(a+\theta(x-a))\,\mathrm{d}\theta$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 113 : [énoncé]

a) $t\mapsto g(x,t)=\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}x)t^2}$ est définie et continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$.
Puisque $t\mapsto|g(x,t)|=\mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$, la fonction z est bien définie.
$t\mapsto\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)=\mathrm{i}t^2\,\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}x)t^2}$ est définie et continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$,
$x\mapsto\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leq t^2\,\mathrm{e}^{-t^2}=\varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
La fonction z est donc définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$z'(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{i}t^2\,\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i}x)t^2}\,\mathrm{d}t\underset{\text{ipp}}{=}-\frac{1}{2(x+\mathrm{i})}z(x)$$

b) En multipliant par la quantité conjuguée

$$\frac{-1}{2(x+\mathrm{i})}=\frac{-x+\mathrm{i}}{2(x^2+1)}=-\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{\mathrm{i}}{2(x^2+1)}$$

donc

$$z(x)=C\exp\left(\mathrm{i}\frac{\arctan x}{2}-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)\right)=\frac{C\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arctan x)/2}}{(x^2+1)^{1/4}}$$

Puisque $z(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, on conclut

$$z(x)=\frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arctan x)/2}}{2(x^2+1)^{1/4}}$$

Exercice 114 : [énoncé]
Posons

$$f(x,t)=\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}$$

La fonction $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ car

$$t^2f(x,t)\underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow}0$$

et donc la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x\mapsto f(x,t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\mathrm{i}t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}$$

La fonction $t\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est continue par morceaux, la fonction $x\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue et

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leq|t|\,\mathrm{e}^{-t^2}=\varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $\mathbb{R}$ indépendant de x.
On en déduit que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ et par une intégration par parties

$$g'(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{i}t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{i}{2}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\right]_{-\infty}^{+\infty}-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t$$

On en déduit que g est solution de l'équation différentielle

$$g'(x)+\frac{1}{2}xg(x)=0$$

Après résolution de cette équation différentielle

$$g(x)=\lambda\,\mathrm{e}^{-x^2/4}$$

Enfin $g(0)=\sqrt{\pi}$ donne $\lambda=\sqrt{\pi}$.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 115 : [énoncé]

a) Posons $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,t)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{1+t^2}$$

La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.
Pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$|f(x,t)|\leq\frac{1}{1+t^2}=\psi(t)$$

avec ψ intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
On en déduit que φ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Par intégration par parties

$$\varphi(x)=-\frac{1}{\mathrm{i}x}+\frac{1}{\mathrm{i}x}\int_0^{+\infty}\frac{2t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

La fonction

$$x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{2t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en vertu de la domination

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{(1+t^2)^2}\right)\right|=\frac{2t^2}{(1+t^2)^2}\leq\frac{2}{1+t^2}$$

On en déduit que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ avec

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\mathrm{i}x^2}-\frac{1}{\mathrm{i}x^2}\int_0^{+\infty}\frac{2t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{2t^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

Or par intégration par parties

$$\int_0^{+\infty}\frac{2t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{(1+t^2)^2}=\left[-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{1+t^2}\right]_0^{+\infty}+\mathrm{i}x\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\varphi'(x)=-\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{2t^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{t^2-1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t$$

Enfin, une dernière intégration par parties donne

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x}\left[-\frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\right]_0^{+\infty}+\mathrm{i}\int_0^{+\infty}\frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t$$

et la relation voulue...

c) Par le changement de variable $u=tx$, on obtient l'expression proposée.
On peut décomposer

$$\varphi'(x)=\mathrm{i}\int_0^1\frac{u\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u+\int_1^{+\infty}\frac{u\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u$$

D'une part, par intégration par parties

$$\int_1^{+\infty}\frac{u\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u=\left[\frac{u\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\right]_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}\frac{x^2-u^2}{(x^2+u^2)^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}\,\mathrm{d}u$$

avec

$$\left[\frac{u\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\right]_1^{+\infty}=-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{x^2+1}\xrightarrow[x\to0^+]{}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}}$$

et

$$\left|\int_1^{+\infty}\frac{x^2-u^2}{(x^2+u^2)^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}\,\mathrm{d}u\right|\leq\int_1^{+\infty}\frac{u^2-x^2}{(x^2+u^2)^2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{x^2+1}\xrightarrow[x\to0^+]{}1$$

D'autre part

$$\int_0^1\frac{u\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u=\int_0^1\frac{u}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u+\int_0^1\frac{u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}-1)}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u$$

avec

$$\int_0^1\frac{u}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u=\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+u^2)\right]_0^1\underset{x\to0^+}{\sim}\ln x$$

et

$$\left|\int_0^1\frac{u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}-1)}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u\right|\leq\int_0^1\frac{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}-1|}{u}\,\mathrm{d}u<+\infty$$

Au final

$$\varphi'(x)=\mathrm{i}\ln x+\mathrm{o}(\ln x)+\mathrm{o}(1)\underset{x\to0^+}{\sim}\mathrm{i}\ln x$$

d) En vertu de ce qui précède

$$\mathrm{Im}(\varphi'(x))\underset{x\to0^+}{\sim}\ln x\to-\infty$$

On en déduit que la fonction réelle $\mathrm{Im}\,\varphi$ n'est pas dérivable en 0, il en est *a fortiori* de même de φ.

Exercice 116 : [énoncé]
Posons $u(x,t)=\mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)$.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

a) Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$ et négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$ donc intégrable sur $[0\,;+\infty[$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction $t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et $x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Pour $x \in [0\,;+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \leq t\mathrm{e}^{-t^2}$$

avec $t \mapsto t\mathrm{e}^{-t^2}$ intégrable sur $[0\,;+\infty[$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\,\mathrm{d}t$$

Par intégration par parties impropre justifiée par deux convergences,

$$f'(x) = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}xf(x)$$

f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et $f(0) = \sqrt{\pi}/2$ on conclut

$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}$$

c) On peut écrire

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} t^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Posons $u_n(t) = \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} t^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}$.
Les fonctions u_n sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
La série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)$ elle aussi continue par morceaux.
Les fonctions u_n sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\int_0^{+\infty} |u_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{x^{2n}}{(2n)!}\int_0^{+\infty} t^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Par intégration par parties impropre justifiée par deux convergences

$$\int_0^{+\infty} t^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2n-1}{2}\int_0^{+\infty} t^{2(n-1)}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} t^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi

$$\int_0^{+\infty} |u_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{x^{2n}}{2^{2n}n!}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Cette quantité étant sommable, on peut intégrer terme à terme et on retrouve

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}n!}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2/4}$$

Exercice 117 : [énoncé]
Posons $u(x,t) = \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)$.
La fonction u est définie sur $\mathbb{R}\times[0\,;+\infty[$ et admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -t\,\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0\,;+\infty[$ car négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$.
$\forall t \in [0\,;+\infty[$, $x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Enfin

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0\,;+\infty[, \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \leq t\,\mathrm{e}^{-t^2} = \varphi(t)$$

avec $\varphi\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Par domination, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} -t\,\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\,\mathrm{d}t$$

Procédons à une intégration par parties avec les fonctions $\mathcal{C}^1$

$$u(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t^2} \text{ et } v(t) = \sin(xt)$$

Puisque le produit uv converge en 0 et $+\infty$, l'intégration par parties impropre est possible et

$$g'(x) = \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi on obtient

$$g'(x) = -\frac{1}{2}xg(x)$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

g est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et $g(0) = \sqrt{\pi}/2$ on conclut

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}$$

Exercice 118 : [énoncé]
Posons $f(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times]0\,;+\infty[$.
Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ car

$$t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1} \text{ avec } x-1 > -1 \text{ et } t^2 f(x,t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

La fonction f admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = (\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$$

Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0\,;+\infty[$ car

$$t^a (\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0 \text{ pour } a \in]1-x\,;1[\text{ et } t^2 \times (\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Pour $[a\,;b] \subset]0\,;+\infty[$,

$$\forall (x,t) \in [a\,;b]\times]0\,;+\infty[, \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq (\ln t)^k (t^{a-1}+t^{b-1})\mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$$

car

$$t^{x-1} \leq t^{a-1} + t^{b-1} \text{ que } t \leq 1 \text{ ou } t \geq 1$$

La fonction φ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ et donc, par domination sur tout segment, Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$

Exercice 119 : [énoncé]

a) Posons $f(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times]0\,;+\infty[$.
Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ et intégrable car

$$t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1} \text{ avec } x-1 > -1 \text{ et } t^2 f(x,t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

La fonction Γ est donc définie sur $]0\,;+\infty[$.

Pour tout $t \in]0\,;+\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$
Pour $x \in [a\,;b] \subset]0\,;+\infty[$, on a $t^{x-1} \leq t^{a-1}$ ou $t^{x-1} \leq t^{b-1}$ selon que $t \leq 1$ ou $t \geq 1$ et donc

$$\forall (x,t) \in [a\,;b]\times]0\,;+\infty[, |f(x,t)| \leq f(a,t) + f(b,t) = \varphi(t)$$

La fonction φ est intégrable et donc, par domination sur tout segment, Γ est continue sur $]0\,;+\infty[$.
car

$$t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1} \text{ avec } x-1 > -1 \text{ et } t^2 f(x,t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

b) Pour $k = 1$ ou 2.

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k} \text{ existe et } \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = (\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$$

Pour tout $x > 0$: $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0\,;+\infty[$ car

$$t^a \ln(t) t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0 \text{ pour } a \in]1-x\,;1[\text{ et } t^2 \times \ln(t) t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ est continue en x et continue par morceaux en t.
Pour tout $[a\,;b] \subset]0\,;+\infty[$

$$\forall (x,t) \in [a\,;b]\times]0\,;+\infty[, \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq (\ln t)^2 (t^{a-1}+t^{b-1})\mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$$

Par des arguments analogues aux précédents, on obtient que φ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ et donc, par domination sur tout segment, Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$ avec

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}t \text{ et } \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}t$$

c) La dérivée seconde de $\ln\Gamma(x)$ est du signe de

$$\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'(x)^2$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_0^{+\infty} \sqrt{t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}}\sqrt{(\ln t)^2 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}}\right)\mathrm{d}t \leq \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right.$$

Ainsi

$$\Gamma'(x)^2 \leq \Gamma(x)\Gamma''(x)$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

et donc

$$(\ln\Gamma(x))'' \geq 0$$

Finalement $x \mapsto \ln\Gamma(x)$ est convexe.

Exercice 120 : [énoncé]

a) Puisque $\ln(1+u) \leq u$, on a

$$0 \leq \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} = \exp\left((n-1)\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\right) \leq \exp\left(-(n-1)\frac{t}{n}\right) = \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{e}^{t/n} \leq \mathrm{e}.\mathrm{e}^{-t}$$

b) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}$ est limite simple de la suite de fonction (u_n) définie par $u_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}$ si $t \in]0\,;n[$ et $u_n(t) = 0$ sinon.
Puisque $|\ln(t)u_n(t)| \leq \mathrm{e}.\ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}$, par convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \ln(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

c) Par le changement de variable $u = nt$

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\ln(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 n\,(1-u)^{n-1}\ln(nu)\,\mathrm{d}u$$

avec

$$\int_0^1 n\,(1-u)^{n-1}\ln(nu)\,\mathrm{d}u = \ln n + \int_0^1 n\ln(u)(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u$$

et

$$\int_\varepsilon^1 n\ln(u)(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u = \left[\ln(u)(1-(1-u)^n)\right]_\varepsilon^1 + \int_\varepsilon^1 \frac{(1-u)^n-1}{u}\,\mathrm{d}u$$

On notera que la fonction $u \mapsto n(1-u)^{n-1}$ est primitivée en $(1-(1-u)^n)$ qui s'annule en 0 de sorte que l'intégration par parties donne à la limite quand $\varepsilon \to 0^+$

$$\int_0^1 n\ln(u)(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{(1-u)^n-1}{u}\,\mathrm{d}u$$

d) Par le changement de variable $u = 1-v$

$$\int_0^1 \frac{(1-u)^n-1}{u}\,\mathrm{d}u = -\int_0^1 \frac{v^n-1}{v-1}\,\mathrm{d}v = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} v^k\,\mathrm{d}v$$

puis

$$\int_0^1 \frac{(1-u)^n-1}{u}\,\mathrm{d}u = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = -\ln n - \gamma + \mathrm{o}(1)$$

Finalement

$$\int_0^{+\infty}\ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\gamma$$

Exercice 121 : [énoncé]

a) Posons $f(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times]0\,;+\infty[$.
Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ car

$$t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to0^+}{\sim} t^{x-1} \text{ avec } x-1 > -1 \text{ et } t^2 f(x,t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

La fonction f admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = (\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$$

Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0\,;+\infty[$ car

$$t^a(\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0 \text{ pour } a \in]1-x\,;1[\text{ et } t^2 \times (\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Pour $[a\,;b] \subset]0\,;+\infty[$,

$$\forall (x,t) \in [a\,;b]\times]0\,;+\infty[, \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq (\ln t)^k(t^{a-1}+t^{b-1})\mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$$

car

$$t^{x-1} \leq t^{a-1}+t^{b-1} \text{ que } t \leq 1 \text{ ou } t \geq 1$$

La fonction φ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ et donc, par domination sur tout segment, Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$

b) Par intégration par parties avec $u'(t) = \mathrm{e}^{-t}$ et $v(t) = t^x$, on obtient

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Sachant $\Gamma(1) = 1$, on obtient par récurrence $\Gamma(n+1) = n!$.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

c) Par le changement de variable proposé

$$\Gamma(n+1) = \frac{n^n}{\mathrm{e}^n}\sqrt{n}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y)\,\mathrm{d}y$$

avec

$$f_n(y) = 0 \text{ sur }]-\infty\,;-\sqrt{n}],\ f_n(y) = \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \text{ sur }]-\sqrt{n}\,;+\infty[$$

Sur $]-\sqrt{n}\,;0]$, une étude fonctionnelle montre $n\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right) - y\sqrt{n} \leq -\frac{y^2}{2}$ qui donne $0 \leq f_n(y) \leq \mathrm{e}^{-y^2/2}$.
Sur $[0\,;+\infty[$, une étude fonctionnelle montre $n\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right) - y\sqrt{n} \leq -y + \ln(1+y)$ pour $t \geq 1$. Cela donne $0 \leq f_n(y) \leq (1+y)\mathrm{e}^{-y}$.

d) La fonction

$$\varphi\colon y \to \begin{cases} \mathrm{e}^{-y^2/2} & \text{si } y \leq 0 \\ (1+y)\mathrm{e}^{-y} & \text{sinon} \end{cases}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Quand $n \to +\infty$, en réalisant un développement limité du contenu de l'exponentielle

$$f_n(y) = \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}+n\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)} \to \mathrm{e}^{-y^2/2}$$

Par convergence dominée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y)\,\mathrm{d}y \to \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y = \sqrt{2\pi}$$

d'où

$$\Gamma(n+1) = n! \sim \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{\mathrm{e}^n}$$

Exercice 122 : [énoncé]

a) La fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
En effet, pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f\colon t \mapsto t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
Puisque $t^2 f(t) = t^{x+1}\,\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, la fonction f est assurément intégrable sur $[1\,;+\infty[$.
De plus, $f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}$ est intégrable sur $]0\,;1]$ si, et seulement si, $x-1 > -1$ *i.e.* $x > 0$.
Ainsi f est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ si, et seulement si, $x > 0$.
Enfin, la fonction f étant positive, l'intégrabilité équivaut à l'existence de l'intégrale.

b) Par intégration par parties

$$I_n(x) = \left[\frac{t^x}{x}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]_0^n + \int_0^n \frac{t^x}{x}\frac{n}{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\mathrm{d}t$$

En répétant l'opération

$$I_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)n^n}\int_0^n t^{x+n-1}\,\mathrm{d}x$$

et finalement

$$I_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

c) Quand $n \to +\infty$

$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln(1-\frac{t}{n})\right) = \exp\left(n\left(-\frac{t}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \to \mathrm{e}^{-t}$$

Considérons la suite des fonctions

$$f_n\colon t \mapsto \begin{cases} t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \in]0\,;n[\\ 0 & \text{si } t \in [n\,;+\infty[\end{cases}$$

Soit $t > 0$ fixé. Pour n assez grand $t \in]0\,;n[$ et

$$f_n(t) = t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \to t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$$

La suite (f_n) converge simplement vers la fonction f introduite dans la première question.
Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux.
Enfin, pour $t \in]0\,;n[$, on a

$$|f_n(t)| = t^{x-1}\exp\left(n\ln(1-t/n)\right) \leq t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} = f(t)$$

car il est connu $\ln(1+u) \leq u$ pour tout $u > -1$. On a aussi $|f_n(t)| \leq f(t)$ pour $t \in [n\,;+\infty[$ et donc

$$\forall t \in]0\,;n[, |f_n(t)| \leq f(t)$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

La fonction f étant intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et affirmer

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Puisque

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$$

on peut conclure

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

Exercice 123 : [énoncé]

Notons que $\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est bien définie.
Pour tout $t \in]0\,;1]$,

$$t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{n+x-1}}{n!}$$

donc

$$\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_{]0;1]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux, $\sum f_n$ converge simplement sur $]0\,;1]$ et est de somme $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ continue par morceaux.
Les fonctions f_n sont intégrables sur $]0\,;1]$ et

$$\int_{]0;1]} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!(x+n)}$$

La série $\sum \int_{]0;1]} |f_n|$ converge donc on peut intégrer terme à terme

$$\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$$

Exercice 124 : [énoncé]

a) Introduisons la fonction

$$u\colon (x,t) \in [0\,;+\infty[\times[0\,;1] \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$$

Pour chaque $x \in [0\,;+\infty[$, la fonction $t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0\,;\pi/2]$. La fonction f est donc bien définie.
La fonction u admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial u}{\partial x}\colon (x,t) \mapsto -\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}$$

Celle-ci est continue en x, continue par morceaux en t et vérifie

$$\forall (x,t) \in [0\,;+\infty[\times[0\,;1],\ \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \leq 1$$

La fonction $\varphi\colon t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0\,;1]$. Par domination, on peut alors affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

b) On a

$$f(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

Pour $x \geq 0$,

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}$$

donc $\lim_{+\infty} f = 0$.

c) g est de classe $\mathcal{C}^1$ par composition et

$$g'(x) = 2xf'(x^2) = -2x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

On a alors

$$\left(g(x) + \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2\right)' = -2x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t + 2\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 0$$

car

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2u^2}\,\mathrm{d}u$$

L'évaluation en 0 permet de conclure.

d) Pour $x \geq 0$, $\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \geq 0$ donc

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{4} - g(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 125 : [énoncé]

a) Posons

$$f(x,t)=\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}$$

définie sur $[0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$.
Soit $x\geq 0$. L'application $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ et

$$0\leq f(x,t)\leq \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}$$

avec

$$\frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}\underset{t\to 0^+}{\sim}\frac{1}{\sqrt{t}} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1}{t^{3/2}}$$

donc $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ et l'intégrale impropre définissant $F(x)$ est bien convergente.

b) Pour chaque $t\in]0\,;+\infty[$, la fonction $x\mapsto f(x,t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=-\frac{t\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}$$

Pour tout $x\in]0\,;+\infty[$, la fonction $t\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$
Pour tout $t\in]0\,;+\infty[$, la fonction $x\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]0\,;+\infty[$
Soit $[a\,;b]\subset]0\,;+\infty[$. Pour $(x,t)\in[a\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leq \sqrt{t}\mathrm{e}^{-at}=\varphi(t)$$

avec $\varphi\colon]0\,;+\infty[\to\mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable.
Par domination sur tout segment, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ et

$$F'(x)=-\int_0^{+\infty}\frac{t\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t)}$$

On constate alors

$$F(x)-F'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\underset{xt=u}{=}\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u=\frac{I}{\sqrt{x}}$$

c) On a

$$F(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t)}\underset{t=u^2}{=}\int_0^{+\infty}\frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2}=\pi$$

et

$$0\leq F(x)\leq\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=\frac{I}{\sqrt{x}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

donc, par encadrement, $F\underset{+\infty}{\longrightarrow}0$.

d) Après résolution (avec méthode de variation de la constante) de l'équation

$$y-y'=\frac{I}{\sqrt{x}}$$

avec la condition initiale $y(0)=\pi$, on obtient

$$\forall x\geq 0, F(x)=\mathrm{e}^x\left(\pi-I\int_0^x\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\right)$$

La nullité de la limite de F en $+\infty$ impose alors

$$I\int_0^x\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\pi$$

et donc

$$I=\sqrt{\pi}$$

Exercice 126 : [énoncé]

a) La fonction

$$\varphi\colon t\mapsto\frac{1-\cos t}{t^2}$$

est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ car

$$\varphi(t)=\mathrm{O}(1/t^2) \text{ quand } t\to+\infty \text{ et } \varphi(t)\underset{t\to 0}{\longrightarrow}1/2$$

La fonction $g\colon(x,t)\mapsto \mathrm{e}^{-xt}\frac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+\times]0\,;+\infty[$ et dominée par φ donc F est continue.
De plus la fonction φ est bornée donc, pour $x>0$

$$|F(x)|\leq\|\varphi\|_\infty\int_0^x\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t=\frac{\|\varphi\|_\infty}{x}$$

et on en déduit que F tend vers 0 en $+\infty$.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

b) Les dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}_+^* \times]0\,;+\infty[$.
$t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
Soit $[a\,;b] \subset \mathbb{R}_+^*$

$$\forall (x,t) \in [a\,;b] \times]0\,;+\infty[, \left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq 2\mathrm{e}^{-at} = \psi(t)$$

La fonction ψ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
Par domination sur tout segment, F est de classe $\mathcal{C}^2$ et

$$F''(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}(1-\cos t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

c) On a

$$F'(x) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

car $F'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et

$$F(x) = x\ln x - x\ln\sqrt{x^2+1} - \arctan x + \frac{\pi}{2}$$

car $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par continuité, on obtient $F(0) = \pi/2$.
Par intégrations par parties

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2(t/2)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{2\sin^2(t/2)}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

d'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 127 : [énoncé]

a) Posons $u(t) = 1-\cos(t)$ et $v(t) = 1/t$.
Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ et le produit uv converge en 0 et $+\infty$:

$$u(t)v(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{2} \to 0 \text{ et } u(t)v(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(1/t\right) \to 0$$

Par intégration par parties impropre, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

sont de même nature. Or

$$\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

converge car

$$\frac{1-\cos t}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1-\cos t}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Cela permet de conclure à la convergence de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

b) Posons

$$f(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-xt}\sin t}{t}$$

définie sur $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$.
Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ et intégrable car

$$f(x,t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 1 \text{ et } t^2 f(x,t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

De plus, puisque $|\sin t| \leq t$ pour tout $t > 0$, on a

$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

c) f admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \mathrm{e}^{-xt}\sin(t)$$

Celle-ci est continue en x et continue par morceaux en t.
Soit $[a\,;b] \subset]0\,;+\infty[$. On a

$$\forall (x,t) \in [a\,;b] \times]0\,;+\infty[, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \mathrm{e}^{-at} = \varphi(t)$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

La fonction φ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$. Par domination sur tout segment, on obtient F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

En exploitant

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\sin(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t\right)$$

on obtient

$$F'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

d) On en déduit

$$F(x) = -\arctan x + C^{te} \text{ sur }]0\,;+\infty[$$

et puisque $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$,

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

Par continuité en 0,

$$I = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 128 : [énoncé]

a) On réalise le changement de variable $t = u + n\pi$:

$$u_n(x) = (-1)^n \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-x(u+n\pi)}\frac{\sin u}{u+n\pi}\,\mathrm{d}u$$

Ici

$$g_n(x,u) = \mathrm{e}^{-x(u+n\pi)}\frac{\sin u}{u+n\pi}$$

b) Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ et tout $u\in[0\,;\pi]$, $g_n(x,u)\geq 0$ et $g_{n+1}(x,u)\leq g_n(x,u)$ donc $u_n(x) = (-1)^n|u_n(x)|$ avec $(|u_n(x)|)_{n\geq 0}$ décroissante. De plus

$$|u_n(x)| \leq \int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}u}{n\pi} = \frac{1}{n} \text{ pour } n\in\mathbb{N}^*$$

donc $|u_n(x)| \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$. Par application du critère spécial, la série $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ converge et

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1} \to 0$$

ce qui donne la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$.

c) La fonction g_n est continue en x, continue par morceaux en u et

$$\forall x\in[0\,;+\infty[\times[0\,;\pi],\ |g_n(x,u)|\leq|\mathrm{sinc}\,u|\leq 1$$

Par domination, les fonctions u_n sont continues.
Comme somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$, la fonction U est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, par sommation d'intégrales contiguës

$$U(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

avec cette intégrale qui est définie quand $x>0$ et connue convergente quand $x=0$.

d) Posons

$$h(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-xt}\sin t}{t}$$

définie sur $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$.
Pour tout $x>0$, la fonction $t\mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ et intégrable car

$$f(x,t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 1 \text{ et } t^2 f(x,t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

h admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \mathrm{e}^{-xt}\sin(t)$$

Celle-ci est continue en x et continue par morceaux en t.
Soit $[a\,;b]\subset]0\,;+\infty[$. On a

$$\forall (x,t)\in[a\,;b]\times]0\,;+\infty[,\ \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq \mathrm{e}^{-at} = \varphi(t)$$

La fonction φ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$. Par domination sur tout segment, on obtient U de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ et

$$U'(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

En exploitant

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\sin(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t\right)$$

on obtient

$$U'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

e) En intégrant

$$U(x) = C - \arctan x \text{ sur }]0\,;+\infty[$$

Or

$$|U(x)| \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $C = \pi/2$.
Par continuité en 0,

$$U(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 129 : [énoncé]

a) Pour $x > 0$, $t^2 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{e}^{-tx} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donne l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{e}^{-tx}$.
Pour $x = 0$, il est connu que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente bien que $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ ne soit pas intégrable.

b) Pour $x \in [a\,;b] \subset]0\,;+\infty[$,

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{e}^{-tx}\right)\right| \leq \mathrm{e}^{-ax} = \varphi(x)$$

avec φ intégrable. Par domination sur tout segment f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

c) Pour $x > 0$,

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} -\sin(t)\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(-\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-x+i)t}\,\mathrm{d}t\right) = -\frac{1}{x^2+1}$$

donc $f(x) = C - \arctan x$.
Or

$$|f(x)| \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc

$$C = \frac{\pi}{2}$$

d) En découpant l'intégrale, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t$$

Posons

$$u_n(t) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t$$

Par application du critère spécial des séries alternées, on établir que la série de fonctions continues $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0\,;1]$, on en déduit que sa somme, à savoir la fonction f, est continue en 0. On peut conclure que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 130 : [énoncé]

a) Posons

$$\tilde{f}(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$$

Les fonctions $\tilde{f}$, $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
Pour chaque x, les fonctions $t \mapsto \tilde{f}(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,t)$ sont intégrables.
Soit $[a\,;b] \subset]0\,;+\infty[$. Sur $[a\,;b] \times [0\,;+\infty[$, on a

$$\left|\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq \frac{t^2\,\mathrm{e}^{-at}}{1+t^2} \leq \mathrm{e}^{-at} = \varphi(t)$$

La fonction φ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Par domination sur tout segment, on peut affirmer que la fonction f est définie et de classe avec

$$f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

On a alors

$$f(x) + f''(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

Posons

$$\tilde{g}(x,t) = \frac{\sin t}{x+t}$$

Les fonctions $\tilde{g}$, $\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x^2}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} g(x,t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ (intégrale convergente via intégration par parties)

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

La fonction $t \mapsto \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}(x,t)$ est intégrable et sur $[a\,;b] \times [0\,;+\infty[$

$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial^2 x}(x,t)\right| \leq \frac{2}{(a+t)^3} = \psi(t)$$

La fonction ψ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Par domination sur tout segment, on peut affirmer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ et

$$g''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin t}{(x+t)^3}\,\mathrm{d}t$$

Par une intégration par parties

$$g''(x) = \left[-\frac{\sin t}{(x+t)^2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} - g(x)$$

b) Pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\left|\tilde{f}(x,t)\right| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

donc f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

$$g(x) - g(0) = -\int_0^{+\infty} \frac{x\sin t}{t(x+t)}\,\mathrm{d}t = -\left(x\int_0^1 \frac{\sin t}{t(x+t)}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{x\sin t}{t(x+t)}\,\mathrm{d}t\right)$$

mais

$$\left|x\int_0^1 \frac{\sin t}{t(x+t)}\,\mathrm{d}t\right| \leq x\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(x+t)} = x\ln(x+1) - x\ln x \to 0$$

et

$$\left|\int_1^{+\infty} \frac{x\sin t}{t(x+t)}\,\mathrm{d}t\right| \leq x\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \to 0$$

donc g est continue en 0.

c) D'une part

$$|f(x)| \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'autre part

$$|g''(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{2\,|\sin t|}{(x+t)^3}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{2\,|\sin t|}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

et en prenant $x \geq 1$

$$|g''(x)| \leq \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{2\,|\sin t|}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc

$$g(x) = \frac{1}{x} - g''(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi $f - g \underset{+\infty}{\to} 0$ ce qui permet via résolution de l'équation différentielle de conclure

$$f = g$$

On en déduit $g(0) = f(0)$ *i.e.*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 131 : [énoncé]

a) Posons

$$f(x,t) = \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$$

est définie sur $[0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$,
$t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et égale à un $\mathrm{O}(1/t^3)$ en $+\infty$. Ainsi F est définie sur $\mathbb{R}_+$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$$

est définie sur $[0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$,
$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ et $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[0\,;+\infty[$.

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux et intégrable sur $]0\,;+\infty[$,
donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ avec

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$$

b) Pour $x \neq 1$

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

d'où

$$F'(x) = \frac{x-1}{x^2-1}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(x+1)}$$

ce qui est encore valable en 1 par continuité.
Par suite

$$F(x) = \frac{\pi}{2}\ln(x+1) + C$$

avec $C = 0$ puisque $F(0) = 0$.

c) En intégrant par parties, on obtient $\pi \ln 2$.

Exercice 132 : [énoncé]

a) Posons

$$f(x,t) = \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}$$

La fonction f est définie et continue sur $]-1\,;+\infty[\times [0\,;1]$.
Pour $t \in [0\,;1]$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{(1+xt)(1+t^2)}$$

La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $]-1\,;+\infty[\times [0\,;1]$.
Par intégration sur un segment, on peut affirmer que la fonction

$$F\colon x \mapsto \int_0^1 f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

est définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1\,;+\infty[$ et

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{t}{(1+xt)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

Par décomposition en éléments simples (en la variable t)

$$\frac{t}{(1+xt)(1+t^2)} = \frac{-x}{(x^2+1)(1+xt)} + \frac{x+t}{(x^2+1)(1+t^2)}$$

donc

$$F'(x) = -\frac{\ln(1+x)}{x^2+1} + \frac{\pi}{4}\frac{x}{x^2+1} + \frac{\ln 2}{2}\frac{1}{1+x^2}$$

Puisque $F(0) = 0$, on peut écrire

$$F(x) = \int_0^x F'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t + \frac{\pi}{8}\ln(x^2+1) + \frac{\ln 2}{2}\arctan x$$

b) Pour $x = 1$, la relation précédente donne

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi \ln 2}{8}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD