Espaces vectoriels de dimensions finies

Résumé

E sera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Déf :

E est dit de dimension finie si et ss'il possède une famille génératrice finie.

Vocabulaire :

Sinon, E est dit de dimension infinie.

Exemples usuels d'esp vect de dimensions finies (à retenir)

1) $\mathbb{K}_n[X]$. $(n \in \mathbb{N})$

2) $\mathbb{K}^n$. $(n \in \mathbb{N}^*)$

3) $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-esp vectoriel.

Exemples usuels d'esp vect de dimensions infinies (à retenir)

$\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $C^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

$C^n([a,b],\mathbb{R})$, $C^n([a,b],\mathbb{C})$, ...

Prop : (Existence d'une base finie)

Tout esp vect non nul de dimension finie possède au moins une base finie.

Prop : (Théorème de la base extraite)

De toute famille génératrice finie on peut extraire une base.

Autrement dit :

Si G est une famille génératrice finie de E alors il existe une base B de E telle que $B \subset G$

Prop (Théorème de la base incomplète)

Toute famille libre peut être complétée en une base de E.

Autrement dit :

Si $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille libre de E, alors il existe des vecteurs $u_{p+1}, \dots, u_n$ tels que $(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n)$ soit une base de E.

Prop et déf :

Soit $E \neq \{0\}$ de dimension finie.

1) Toutes les bases de E ont le même cardinal.

2) Ce cardinal commun s'appelle la dimension de E.

On le note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ ou $\dim(E)$, s'il n'y a pas risque de confusion.

Convention : $\boxed{\dim(\{0\}) = 0}$

Prop :

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dim(\mathbb{K}^n) = n$

3) $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ et $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$

Prop :

Supposons que $\dim(E) = n \geqslant 1$.

1) Si L f^{lle} libre de E alors $\operatorname{card}(L) \leqslant n$.

2) Si G f^{lle} génératrice finie de E alors $\operatorname{card}(G) \geqslant n$.

Prop

Supp que $\dim(E) = n$.

Soit $\mathcal{F}$ une famille à n éléments de E.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $\mathcal{F}$ famille libre.

2) $\mathcal{F}$ base de E.

3) $\mathcal{F}$ famille génératrice de E.

Prop :

Soient f et $g \in \mathcal{L}(E,F)$.

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On a :

1) $f = 0 \iff (\forall 1 \leqslant i \leqslant n,\ f(e_i) = 0)$

2) $f = g \iff (\forall 1 \leqslant i \leqslant n,\ f(e_i) = g(e_i))$

Prop

Supposons que $E = F \oplus G$.

Soient f et $g \in \mathcal{L}(E, H)$. On a :

1) $f = 0 \iff \begin{cases} f = 0 \text{ sur } F \\ f = 0 \text{ sur } G \end{cases}$

2) $f = g \iff \begin{cases} f = g \text{ sur } F \\ f = g \text{ sur } G \end{cases}$

Prop

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où $\dim(E) = n \geq 1$.

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Notons $f(B) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ la famille image de B. On a :

$$f \text{ bijective} \iff f(B) \text{ base de } E$$

Prop :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$; où $\dim(E) = \dim(F)$.

Soit B une base de E. On a :

$$f \text{ bijective} \iff f(B) \text{ base de } F$$

f bijective $\iff$ f transforme une base de E en une base de F.

Prop :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$; où $\dim(E) = \dim(F)$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) f injective

2) f bijective

3) f surjective

Résumé important (à bien retenir)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, où E et F ev de dim finies et de même dimension.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) f injective
2) f surjective
3) f bijective
4) f transforme une base de E en une base de F
5) $\ker(f) = \{0\}$
6) $\mathrm{Im}(f) = F$

Cas particulier très fréquent :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E ev de dim finie.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) f injective
2) f surjective
3) f bijective
4) f transforme une base de E en une base de E
5) $\ker(f) = \{0\}$
6) $\mathrm{Im}(f) = E$

Déf :

On dit que les espaces vectoriels E et F sont isomorphes si et ssi il existe un isomorphisme de E vers F.

Prop

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies. On a :

$$E \text{ et } F \text{ sont isomorphes} \iff \dim(E) = \dim(F)$$

Dimension d'un sev

Prop :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1) Tout sev F de E est aussi de dimension finie, et on a :

$$\dim(F) \leq \dim(E)$$

2) Soit F un sev de E. On a :

$$\dim(F) = \dim(E) \iff F = E$$

3) $\dim(F) = 0 \iff F = \{0\}$

Réflexe :

Pour montrer qu'un sev coincide avec l'espace tout entier, il suffit de montrer qu'ils ont la même dimension.

Prop

E de dim finie.

Tout sev de E possède au moins un sev supplémentaire.

Prop :

E esp vect de dim finie.

Soient F et G deux sev de E.

1) $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$

2) Si $E = F \oplus G$ alors $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$

3) Tous les sev supplémentaires de F ont la même dimension.

Prop :

E de dimension finie.

Soient F et G deux sev de E. On a :

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \dim E = \dim F + \dim G \end{cases}$$

Prop : (Formule de Grassmann)

E de dimension finie.

Soient F et G deux sev de E. On a :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Rang d'une famille de vecteurs

Déf :

Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E.

Le rang de la f^lle $(x_1, \dots, x_p)$ est l'entier noté $rg(x_1, \dots, x_p)$ et défini par :

$$rg(x_1, \dots, x_p) = \dim\left(vect(x_1, \dots, x_p)\right)$$

Prop : E de dimension finie. On a :

1) $rg(x_1, \dots, x_p) \leqslant \dim(E)$

2) $rg(x_1, \dots, x_p) \leqslant p$

Exemples express :

1) $rg(0) = 0$

2) Si $x_1 \neq 0$, alors $rg(x_1) = 1$

3) $rg(x_1, x_1) = rg(x_1)$

4) $rg(x_1, x_1, x_2, x_3, \dots, x_p) = rg(x_1, x_2, x_3, \dots, x_p)$

Prop :

$rg(x_1, \dots, x_p) = p \iff (x_1, \dots, x_p)$ libre

Autrement dit :

Le rang d'une famille est égale à son cardinal si et ssi elle est libre.

Rang d'une application linéaire

Déf

E et F étant deux $\mathbb{K}$_esp vect de dimensions quelconques.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, avec $Im(f)$ de dimension finie.

Le rang de f, noté $rg(f)$, est défini par :

$$rg(f) = dim(Im(f))$$

NB

Quand $Im(f)$ est de dimension finie, on dit que f est de rang fini.

Prop :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

Si E ou F est de dimension finie, alors f est de rang fini.

Prop :

Supp que E et F de dimensions finies.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a :

1) $rg(f) \leq dim(E)$

2) $rg(f) \leq dim(F)$

Prop :

Supp que E et F de dimensions finies et que $\dim E = \dim F = n$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a :

$$f \text{ bijective} \iff rg(f) = n$$

Corollaire

E $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a :

$$f \text{ automorphisme de } E \iff rg(f) = \dim(E)$$

Prop (Théorème du rang)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, où E $\mathbb{K}$-ev de dim finie. On a :

$$\boxed{\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\ker(f))}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\dim(E) = rg(f) + \dim(\ker(f))}$$

Remarque pratique 1

Si on connait $\dim(\ker(f))$, on déduit $\dim(\mathrm{Im}(f))$, et inversement.

Remarque pratique 2

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E $\mathbb{K}$-esp vect de dimension finie.

On sait que :

$$E = \mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f) \iff \begin{cases} \mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\} \\ \dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\ker f) \end{cases}$$

Notez que le 2ème point est garanti par le théorème du rang.

Prop

E et F deux $\mathbb{K}$-esp vect de dim finies.

Soit $f \in isom(E,F)$. Soit H sev de E. On a

$$\dim(f(H)) = \dim(H)$$

Prop

Le rang d'une application linéaire est inchangé par composition à gauche ou à droite par un isomorphisme.

Autres propriétés propres à la dimension finie

Prop :

E $\mathbb{K}$-esp vect de dim finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Les propositions suivantes sont équivalentes:

1) f bijective (càd f inversible)

2) $\exists g \in \mathcal{L}(E), f \circ g = I_E$

3) $\exists g \in \mathcal{L}(E), g \circ f = I_E$

Prop.

E $\mathbb{K}$-e, vect de dimension quelconque.

Soit F un sev de E.

1) F est une droite vectorielle $\Leftrightarrow \dim(F) = 1$

2) F est un plan vectoriel $\Leftrightarrow \dim(F) = 2$

Prop :

1) L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 est un esp vectoriel de dimension 1.
2) L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 est un esp vectoriel de dimension 2.
3) L'ensemble des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coéfficients constants est un esp vectoriel de dimension 2.

Prop (Dimension d'un produit d'esp vectoriels)

Les espaces en jeu ici sont de dimensions finies.

1) $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$
2) En général, si $n \geq 2$, on a :

   i) $\dim(E_1 \times \dots \times E_n) = \dim(E_1) + \dots + \dim(E_n)$

   ii) $\dim(E^n) = n \dim(E)$

Prop :

F_1 et F_2 deux sev de dimensions finies de E. On a :

1) $\dim(F_1 + F_2) \leq \dim(F_1) + \dim(F_2)$
2) $\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) \iff$ La somme $F_1 + F_2$ est directe

---

Prop

$F_1, \dots, F_p$ des sev de dimensions finies, où $p \in \mathbb{N}^*$. On a :

1) $\dim(F_1 + \dots + F_p) \leq \dim(F_1) + \dots + \dim(F_p)$
2) $\dim(F_1 + \dots + F_p) = \dim(F_1) + \dots + \dim(F_p)$ si et seulement si la somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe.

Déf (Base adaptée à un sev)

Soient E un $\mathbb{K}$-esp vectoriel de dimension finie et F un sev de E.
On appelle **base adaptée à F** toute base de E complétant une base de F.

Prop

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-esp vectoriels de **dimensions finies**.

1) $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$
2) $\dim(\mathcal{L}(E)) = (\dim(E))^2$

Formes linéaires et hyperplans

Rappel :

Soit E un $\mathbb{K}$-esp vectoriel (de dimension quelconque).
On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E vers $\mathbb{K}$.

Notation et vocabulaire :

1) On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, l'espace des formes linéaires sur E.
2) E^* s'appelle **l'espace dual** de E.

Prop :

Si E est de dimension finie, alors $\dim(E^*) = \dim(E)$

Déf (Hyperplan)

Soit E un $\mathbb{K}$-esp vectoriel (de dimension quelconque).
Un **hyperplan** de E est le noyau d'une **forme linéaire** non nulle.

Prop

Soit E un $\mathbb{K}$-ev vectoriel (de dimension quelconque).

Si H est un hyperplan de E, alors pour toute droite D non contenue dans H, on a :

$$E = H \oplus D$$

Autrement dit :

Si f est une forme linéaire non nulle, alors pour tout $a \in E$ vérifiant $f(a) \neq 0$, on a :

$$E = \ker(f) \oplus \text{vect}(a)$$

Prop :

Tout supplémentaire d'une droite vectorielle est un hyperplan.

Autrement dit :

Si $\begin{pmatrix} H \text{ sev de } E \\ a \in E \setminus \{0\} \\ H \oplus \text{vect}(a) = E \end{pmatrix}$ alors H est un hyperplan de E.

Prop :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev vectoriel (de dimension quelconque).

Deux formes linéaires non nulles ont même noyau si et seulement si elles sont proportionnelles. (càd colinéaires)

Autrement dit :

Si f et g deux formes linéaires non nulles, alors on a :

$$\ker(f) = \ker(g) \Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{K}^*, \ g = \alpha f)$$

Prop :

Si E est un $\mathbb{K}$_esp vect de dimension finie $n \geq 1$, alors les hyperplans de E sont exactement les sev de dimension $(n-1)$.

Autrement dit :

Supp que $\dim(E) = n \geq 1$ et F sev de E. On a :

$$F \text{ est un hyperplan de } E \iff \dim(F) = n-1$$

Prop

Soit E est un $\mathbb{K}$_esp vect de dimension finie $n \geq 1$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Un hyperplan H de E peut s'écrire sous la forme

$$H = \{ x \in E \,/\, a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0 \}$$

où les x_i sont les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$, et les a_i sont des éléments de $\mathbb{K}$, non tous nuls.

Vocabulaire

L'écriture « $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ » s'appelle une équation de l'hyperplan H.

Réflexe :

Soit $(H) : a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ un hyperplan de E.

Soit $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i \in E$. On a :

$$u \in H \iff \sum_{i=1}^{n} a_i u_i = 0$$

Prop :

Toutes les équations d'un hyperplan sont proportionnelles.

Autrement dit :

Soit H un hyperplan de E d'équation :

$$H : a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$$

Une autre équation de H est forcément de la forme :

$$H : (\lambda a_1) . x_1 + \cdots + (\lambda a_n) x_n = 0$$

où $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Fin