CONCOURS COMMUN 2006

DES ECOLES DES MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES

Epreuve Spécifique de Mathématiques

(filière MPSI)

Problème 1 : Analyse

Partie 1 : étude d'un arc paramétré

1) D'après les théorèmes de croissances comparées, les fonctions x et y tendent vers 0 quand x tend vers 0 par valeurs strictement supérieures. x et y sont donc continues en 0 si et seulement si $\lambda = 0$.

2) x et y sont dérivables sur $]0, +\infty[$ et pour $t \in]0, +\infty[$,

$$x'(t) = \ln^3(t) + t.3.\frac{1}{t}\ln^2(t) = \ln^2(t)(\ln(t) + 3) \text{ et } y'(t) = \ln^2(t) + t.2.\frac{1}{t}\ln(t) = \ln(t)(\ln(t) + 2).$$

x' est strictement négative sur $]0, e^{-3}[$, strictement positive sur $]e^{-3}, 1\cup]1, +\infty[$ et s'annule en e^{-3} et 1.
y' est strictement positive sur $]0, e^{-2}[\cup]1, +\infty[$, strictement négative sur $]e^{-2}, 1[$ et s'annule en e^{-2} et 1.

3) Tableau de variations conjointes de x et y.

t	0		$1/e^3$		$1/e^2$		1		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0		$+$		0	$+$	
x	0	$\searrow$	$-\frac{27}{e^3}$	$\nearrow$	$-\frac{8}{e^2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\nearrow$	$\frac{2}{e^3}$	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$			0	$-$	0	$+$	

4) Quand u tend vers 0,

$$x(1+u) = (1+u)(\ln(1+u))^3 \sim 1.u^3 = u^3$$

et

$$\begin{aligned} y(1+u) &= (1+u)(\ln(1+u))^2 = (1+u+o(u^3))(u - \frac{u^2}{2} + o(u^2))^2 = (1+u+o(u^3))(u^2 - u^3 + o(u^3)) \\ &= u^2 + o(u^3) \end{aligned}$$

x' et y' s'annulent simultanément si et seulement si $t = 1$. L'arc paramétré f admet donc un et un seul point singulier, le point $M(1) = (0, 0)$.

D'après ce qui précède, quand $u = t-1$ tend vers 0, $\overrightarrow{M(1)M(1+u)} = (o(u^2), u^2+o(u^2))$ et donc, $\frac{1}{u^2}\overrightarrow{M(1)M(1+u)} = (o(1), 1+o(1)) \to (0, 1)$. Ainsi, quand t tend vers 1, la droite $(M(1)M(t))$ tend vers une position limite, à savoir l'axe des ordonnées.

$\boxed{\text{L'axe des ordonnées est tangente à l'arc au point } M(1).}$

De plus, quand u tend vers 0, $x(1+u)$ est du signe de u^3 et donc change de signe, tandis que $y(1+u)$ est du signe de u^2 et reste positif quand u est au voisinage de 0. On en déduit que $M(1)$ est un point de rebroussement de première espèce (voir graphique en 6)b)).

5) Pour $t \in]0,1[\cup]1,+\infty[$,

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t\ln^2(t)}{t\ln^3(t)} = \frac{1}{\ln(t)}.$$

Quand t tend vers $+\infty$, $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers $+\infty$. De plus, $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{1}{\ln(t)}$ tend vers 0. On en déduit que, quand t tend vers $+\infty$, l'arc admet une branche parabolique de direction (Ox).

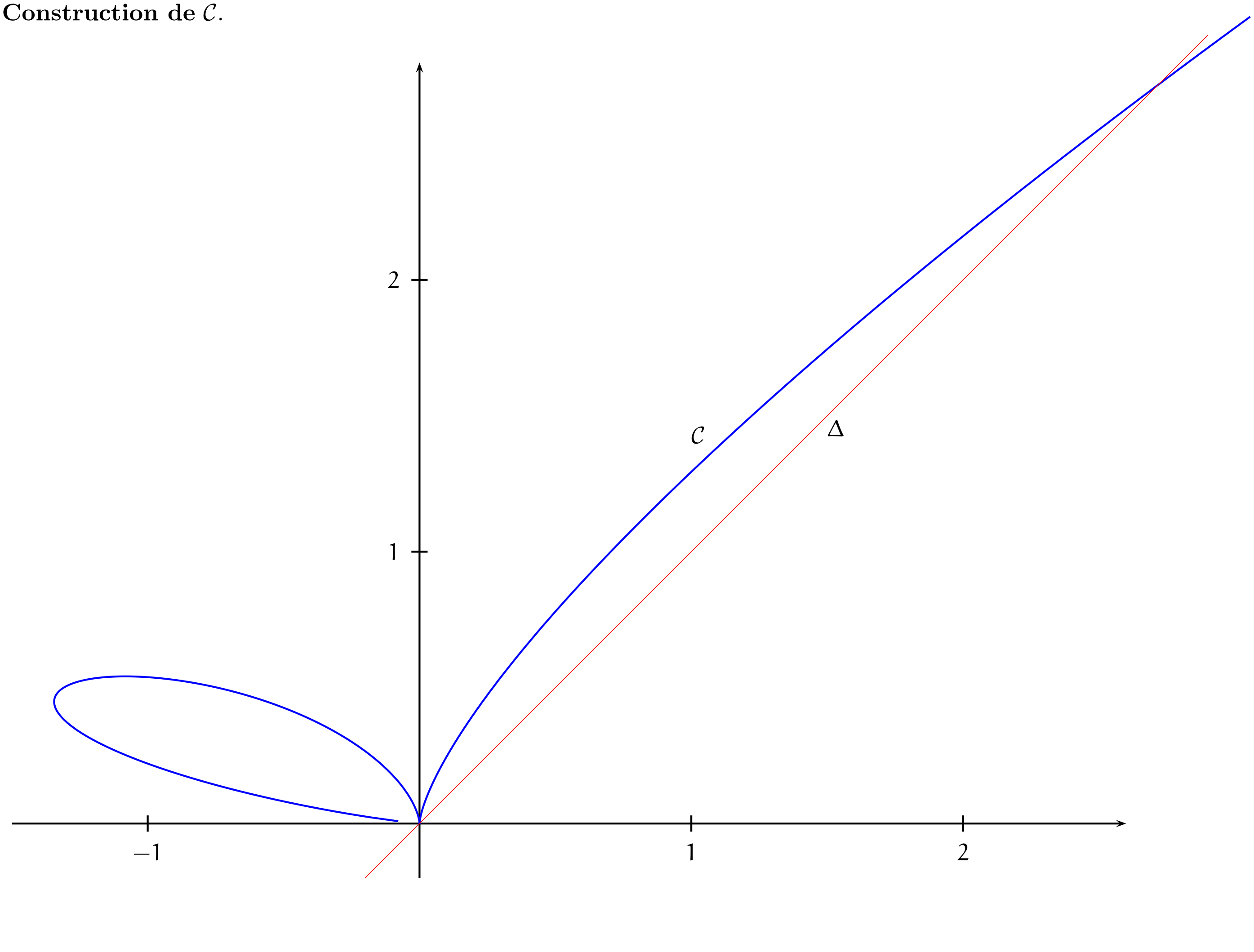
Quand t tend vers 0, x et y tendent vers 0. On peut donc prolonger l'arc par continuité en 0 en posant $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$, ou encore $M(0) = (0,0)$. Ensuite, quand t tend vers 0, $\dfrac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = \dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{1}{\ln(t)}$ tend vers 0. On en déduit que l'arc admet l'axe des abscisses pour tangente en $M(0)$.

6) **a)** $M(0) = (0,0)$ est sur Δ. D'autre part, pour $t \in]0,+\infty[$,

$$x(t) = y(t) \Leftrightarrow t\ln^3(t) = t\ln^2(t) \Leftrightarrow \ln^2(t)(\ln(t)-1) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ ou } t = e.$$

Les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et Δ sont les points $M(0) = (0,0) = M(1)$ et $M(e) = (e,e)$.

b) Construction de $\mathcal{C}$.



Partie 2 : calcul de primitives

7) Soit x un réel strictement positif. Pour n entier naturel donné, la fonction $t \mapsto t^\alpha \ln^n(t)$ est continue sur $[1, x]$ si $x \geq 1$ ou $[x, 1]$ si $x < 1$, et on en déduit que $Z_n(x)$ existe.

$$Z_0(x) = \frac{1}{0!}\int_1^x t^\alpha \, dt = \frac{x^{\alpha+1}-1}{\alpha+1}.$$

Ensuite, les fonctions $t \mapsto \dfrac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ et $t \mapsto \ln(t)$ sont de classe C^1 sur $[1, x]$ si $x \geq 1$ ou $[x, 1]$ si $0 < x < 1$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$Z_1(x) = \frac{1}{1!}\int_1^x t^\alpha \ln(t)\, dt = \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln(t)\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\frac{1}{t}\, dt = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln(x) - \frac{1}{\alpha+1}\int_1^x t^\alpha\, dt = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln(x) - \frac{x^{\alpha+1}-1}{(\alpha+1)^2}.$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ Z_0(x) = \frac{x^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} \text{ et } Z_1(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln(x) - \frac{x^{\alpha+1}-1}{(\alpha+1)^2}.}$$

8) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$. Une intégration par parties, encore licite, fournit :

$$\begin{aligned}
Z_{n+1}(x) &= \frac{1}{(n+1)!}\left(\left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln^{n+1}(t)\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}(n+1)\ln^n(t)\frac{1}{t}\, dt\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln^{n+1}(x) - \frac{1}{\alpha+1}\frac{1}{n!}\int_1^x t^\alpha \ln^n(t)\, dt \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln^{n+1}(x) - \frac{1}{\alpha+1}Z_n(x).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0, +\infty[,\ Z_{n+1}(x) = -\frac{1}{\alpha+1}Z_n(x) + \frac{1}{(n+1)!}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln^{n+1}(x).}$$

9) Montrons le résultat par récurrence sur n.

Pour $n = 0$, d'après 7),

$$\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1} - \left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1-k}\frac{\ln^k(x)}{k!}\right]x^{\alpha+1} = \frac{-1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} = Z_0(x).$$

La formule de l'énoncé est donc vraie pour $n = 0$.

Soit $n \geq 0$. Supposons que $Z_n(x) = \left(\dfrac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1} - \left[\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1-k}\frac{\ln^k(x)}{k!}\right]x^{\alpha+1}$. Alors, d'après 8),

$$\begin{aligned}
Z_{n+1}(x) &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\frac{\ln^{n+1}(x)}{(n+1)!} - \frac{1}{\alpha+1}Z_n(x) \\
&= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\frac{\ln^{n+1}(x)}{(n+1)!} - \frac{1}{\alpha+1}\left(\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1} - \left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1-k}\frac{\ln^k(x)}{k!}\right]x^{\alpha+1}\right) \\
&= \left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{(n+1)+1} - \left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{(n+1)+1-k}\frac{\ln^k(x)}{k!}\right]x^{\alpha+1} - \left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^1\frac{\ln^{n+1}(x)}{(n+1)!}x^{\alpha+1} \\
&= \left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{(n+1)+1} - \left[\sum_{k=0}^{n+1}\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{(n+1)+1-k}\frac{\ln^k(x)}{k!}\right]x^{\alpha+1}.
\end{aligned}$$

Le résultat est ainsi démontré par récurrence, et donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[,\ Z_n(x) = \left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1} - \left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1-k}\frac{\ln^k(x)}{k!}\right]x^{\alpha+1}.}$$

10) Ce qui précède montre que les fonctions $x \mapsto \ln^k(x)x^\alpha$, $0 \leq k \leq n$, admettent une primitive dans $\mathcal{N}^n_{\alpha+1}$ (la fonction $x \mapsto -n!\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1-k}\frac{\ln^k(x)}{k!}\right]x^{\alpha+1}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln^k(x)x^\alpha$ sur $]0,+\infty[$). Par linéarité, il en est de même de tout élément de $\mathcal{N}^n_\alpha$.

Partie 3 : résolution d'équations différentielles

11) Soit f une fonction de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E_1) \text{ sur }]0,+\infty[&\Leftrightarrow \forall x > 0,\ xf'(x) - \alpha f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x > 0,\ x^{-\alpha}f'(x) - \alpha x^{-\alpha-1}f(x) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall x > 0,\ (x^{-\alpha}f)'(x) = 0\\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x > 0,\ x^{-\alpha}f(x) = C \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x > 0,\ f(x) = Cx^\alpha.
\end{aligned}$$

12) a) La fonction $\exp\ :\ u \mapsto e^u$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ et la fonction $t \mapsto h(t)$ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$. Donc, la fonction $k = h \circ \exp$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Pour $u \in \mathbb{R}$, on a $k'(u) = e^u h'(e^u)$ puis $k''(u) = e^u h'(e^u) + (e^u)^2 h''(e^u)$.

b) Pour $u \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
k''(u) - 2\alpha k'(u) + \alpha^2 k(u) &= ((e^u)^2h''(e^u) + e^u h'(e^u)) - 2\alpha e^u h'(e^u) + \alpha^2 h(e^u)\\
&= (e^u)^2 h''(e^u) + (1-2\alpha)e^u h'(e^u) + \alpha^2 h(e^u).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\forall u \in \mathbb{R},\ k''(u) - 2\alpha k'(u) + \alpha^2 k(u) = 0 &\Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R},\ (e^u)^2h''(e^u) + (1-2\alpha)e^u h'(e^u) + \alpha^2 h(e^u) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall x > 0,\ x^2h''(x) + (1-2\alpha)xh'(x) + \alpha^2 h(x) = 0.
\end{aligned}$$

c) L'équation différentielle précédente est linéaire, homogène, du second ordre, à coefficients constants. Son équation caractéristique est $z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 = 0$ ou encore $(z-\alpha)^2 = 0$. Cette équation admet la solution double $z_0 = \alpha$. Les fonctions k cherchées sont donc les fonctions de la forme $u \mapsto (\lambda u + \mu)e^{\alpha u}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

d) Mais alors, pour $x > 0$, $h(x) = k(\ln(x)) = (\lambda \ln(x) + \mu)x^\alpha = (a_0 + a_1(\ln x))x^\alpha$, $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$. L'ensemble des solutions de (E_2) est donc $\mathcal{N}^1_\alpha$.

13) a) $P(P(y)) = x(xy' - \alpha y)' - \alpha(xy' - \alpha y) = x(xy'' + y' - \alpha y') - \alpha(xy' - \alpha y) = x^2y'' + (1-2\alpha)xy' + \alpha^2 y$.
Par suite, $P^2(y) = 0 \Leftrightarrow y$ solution de $(E_2) \Leftrightarrow y \in \mathcal{N}^1_\alpha$ (d'après 12)d)).

b) Pour $n = 1$, on a effectivement $P^1(y) = x^1y^{(1)} + a_0x^0y^{(0)}$ avec $a_0 = -\alpha$.

Soit $n \geq 1$. Supposons que $P^{(n)}(y) = x^ny^{(n)} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_kx^ky^{(k)}$. Alors,

$$\begin{aligned}
P^{n+1}(y) = P(P^n(y)) &= x(x^ny^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_kx^ky^{(k)})' - \alpha(x^ny^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_kx^ky^{(k)})\\
&= x(x^ny^{(n+1)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_kx^ky^{(k+1)} + nx^{n-1}y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_kkx^{k-1}y^{(k)}) - \alpha(x^ny^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_kx^ky^{(k)})\\
&= x^{n+1}y^{(n+1)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_kx^{k+1}y^{(k+1)} + nx^ny^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_kkx^ky^{(k)} - \alpha(x^ny^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_kx^ky^{(k)})\\
&= x^{n+1}y^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}x^ky^{(k)} + nx^ny^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} a_kkx^ky^{(k)} - \alpha(x^ny^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_kx^ky^{(k)})\\
&= x^{n+1}y^{(n+1)} + \sum_{k=0}^{n} b_kx^ky^{(k)}
\end{aligned}$$

où les b_k sont des coefficents fonctions des a_j et de α. Le résultat est démontré par récurrence.

c) D'après 11), le résultat est vrai pour $n = 1$ (et d'après 13)a), le résultat est vrai pour $n = 2$, mais il est inutile de le constater).
Soit $n \geq 1$. Supposons que l'ensemble des solutions de l'équation $P^n(y)$ soit $\mathcal{N}_\alpha^{n-1}$. Alors,

$$\begin{aligned}
P^{n+1}(y) = 0 &\Leftrightarrow P^n(P(y)) = 0 \\
&\Leftrightarrow P(y) \in \mathcal{N}_\alpha^{n-1} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&\Leftrightarrow \exists p_{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]/\ P(y) = p_{n-1}(\ln x)x^\alpha \Leftrightarrow \exists p_{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]/\ xy' - \alpha y = p_{n-1}(\ln x)x^\alpha \\
&\Leftrightarrow \exists p_{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]/\ x^{-\alpha}y' - \alpha x^{-\alpha-1}y = \frac{1}{x}p_{n-1}(\ln x) \\
&\Leftrightarrow \exists p_{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]/\ (x^{-\alpha}y)' = \frac{1}{x}p_{n-1}(\ln x)\ (*)
\end{aligned}$$

Les primitives de la fonction $\frac{1}{x}p_{n-1}(\ln x)$ sont de la forme $C + p_n(\ln x)$ où C est une constante réelle arbitraire et p_n un certain polynôme de degré au plus n. Donc,

$$(*) \Rightarrow x^{-\alpha}y = C + p_n(\ln x) \Rightarrow y = (C + p_n(\ln x))x^\alpha \Rightarrow y \in \mathcal{N}_\alpha^n.$$

Réciproquement, si $y \in \mathcal{N}_\alpha^n$, il existe un certain polynôme p_n de degré au plus n tel que $y = p_n(\ln x)x^\alpha$. Mais alors,

$$(x^{-\alpha}y)' = (p_n(\ln x))' = \frac{1}{x}p_n'(\ln x),$$

où p_n' est un polynôme de degré au plus $n - 1$. Par suite, $(*)$ est vérifiée. Finalement, $P^{n+1}(y) = 0$ si et seulement si $y \in \mathcal{N}_\alpha^n$.

Le résultat est démontré par récurrence.

Problème 2 : Algèbre

Partie 1 : un résultat d'arithmétique

1) Supposons $\alpha \in \mathbb{Q}$. Il existe alors $(a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha = \dfrac{a}{b}$. Dans ce cas, $p = b$ est dans $A_{n,\alpha}$ car $p \in \mathbb{N}^*$ et $e^{2inb\pi\alpha} = e^{2(na)i\pi} = 1$. Donc, si $\alpha \in \mathbb{Q}$, $A_{n,\alpha} \neq \varnothing$.
Réciproquement, si $A_{n,\alpha} \neq \varnothing$, il existe un entier naturel non nul p tel que $e^{2i\pi np\alpha} = 1$. Mais alors, il existe $(p, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$ tel que $2\pi np\alpha = 2k\pi$ ou encore tel que $\alpha = \dfrac{k}{np}$. Par suite, $\alpha \in \mathbb{Q}$. Finalement,

$$\boxed{A_{n,\alpha} \neq \varnothing \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{Q}.}$$

2) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $e^{2i\pi np(-\alpha)} = 1 \Leftrightarrow e^{2i\pi np\alpha} = 1$ (par passage à l'inverse). Ceci montre que $A_{n,-\alpha} = A_{n,\alpha}$. En particulier, $p(-\alpha) = p(\alpha)$.

3) D'après 2),

$$\begin{aligned} p \in A_{n,\alpha} &\Leftrightarrow p \in A_{n,|\alpha|} \\ &\Leftrightarrow e^{2inp\pi|\alpha|} = 1 \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{N}^* / \ 2np\pi\alpha = 2t\pi \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{N}^* / \ npr = ts \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{N}^* / \ pn'r = s't \text{ (après simplification par } d \neq 0) \end{aligned}$$

4) $\dfrac{s}{d}$ est l'entier naturel non nul s' et $\dfrac{s}{d}n'r = (n'r)s' = ts'$ avec t entier naturel non nul. Par suite, d'après 3), $\dfrac{s}{d}$ est dans $A_{n,\alpha}$ ce qui montre que $p(\alpha) \leq \dfrac{s}{d}$.
Réciproquement, puisque $p(\alpha)$ est dans $A_{n,\alpha}$, il existe un entier naturel non nul t tel que $p(\alpha)n'r = s't$. L'entier s' divise donc $p(\alpha)n'r$. Mais l'entier s' est premier avec les entiers n' et r et donc avec l'entier $n'r$. D'après le théorème de Gauss, s' divise $p(\alpha)$ et en particulier, $s' \leq p(\alpha)$.

Finalement,

$$\boxed{p(\alpha) = s' = \frac{s}{d} = \frac{s}{n \wedge s}.}$$

Partie 2 : un ensemble de matrices

5) $\mathbb{J}$ ne contient pas la matrice nulle et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

6) $N^2 = (E_{1,2} + E_{2,3})(E_{1,2} + E_{2,3}) = E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $N^3 = N^2N = (E_{1,2} + E_{2,3})E_{1,3} = 0$. Mais alors, pour $p \geq 3$, $N^p = N^{p-3}N^3 = 0$. Enfin, $N^0 = I_3$.

$$\boxed{N^0 = I_3,\ N^1 = N,\ N^2 = E_{1,3} \text{ et } \forall p \geq 3,\ N^p = 0_3.}$$

Soient alors $p \geq 2$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$.
Puisque les matrices λI_3 et N commutent, la formule du binôme de Newton permet d'écrire

$$\begin{aligned} (J_\lambda)^p = (\lambda I_3 + N)^p &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (\lambda I_3)^{p-k} N^k = (\lambda I_3)^p + \binom{p}{1}(\lambda I_3)^{p-1}N + \binom{p}{2}(\lambda I_3)^{p-2}N^2 \\ &= \lambda^p I_3 + p\lambda^{p-1}N + \frac{p(p-1)}{2}\lambda^{p-2}N^2. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $p \geq 2$, $(J_\lambda)^p = u_p.I_3 + v_p.N + w_p.N^2$ avec $u_p = \lambda^p$, $v_p = p\lambda^{p-1}$ et $w_p = \frac{p(p-1)}{2}\lambda^{p-2}$.

Pour $p = 1$, on a encore $u_1.I_3 + v_1.N + w_1.N^2 = \lambda I_3 + N = J_\lambda = (J_\lambda)^1$ et pour $p = 0$, $u_0.I_3 + v_0.N + w_0.N^2 = I_3 = (J_\lambda)^0$ et finalement,

$$\boxed{\forall (p, \lambda) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}^*,\ (J_\lambda)^p = u_p.I_3 + v_p.N + w_p.N^2 \text{ où } u_p = \lambda^p,\ v_p = p\lambda^{p-1} \text{ et } w_p = \frac{p(p-1)}{2}\lambda^{p-2}.}$$

7) Soient $p \geq 2$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

$$S_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}(J_\lambda)^k = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}(u_k.I_3 + v_k.N + w_k.N^2) = \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}u_k\right) I_3 + \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}v_k\right) N + \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}w_k\right) N^2.$$

Pour $p \geq 0$, posons alors $x_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}u_k = \sum_{k=0}^{p} \frac{\lambda^k}{k!}$. Pour $p \geq 2$, on a alors

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}v_k = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!}k\lambda^{k-1} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\lambda^k}{k!} = x_{p-1}.$$

et aussi

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}w_k = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{p} \frac{1}{k!}k(k-1)\lambda^{k-2} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{p} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{p-2} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{1}{2}x_{p-2}.$$

Finalement,

$$\boxed{\forall p \geq 2,\ S_p = x_p.I_3 + x_{p-1}.N + \frac{1}{2}x_{p-2}.N^2 \text{ où } x_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{\lambda^k}{k!}.}$$

8) D'après 7), $S_p = \begin{pmatrix} x_p & x_{p-1} & \frac{1}{2}x_{p-2} \\ 0 & x_p & x_{p-1} \\ 0 & 0 & x_p \end{pmatrix}$ où $x_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{\lambda^k}{k!}$. D'après le résultat admis par l'énoncé, quand p tend vers $+\infty$, la matrice S_p tend vers la matrice

$$\boxed{S = \begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda & \frac{1}{2}e^\lambda \\ 0 & e^\lambda & e^\lambda \\ 0 & 0 & e^\lambda \end{pmatrix} = e^\lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Partie 3 : étude d'une application linéaire

9) Tout d'abord, si f est dans E, $\varphi(f)$ est bien un élément de E ou encore, φ est bien une application de E dans E. Soient alors $(f_1, f_2) \in E^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$. Pour tout réel x, on a

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) &= (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x + 2\pi) \\
&= \lambda_1 f_1(x + 2\pi) + \lambda_2 f_2(x + 2\pi) \text{ (par définition des opérations de } E) \\
&= \lambda_1 \varphi(f_1)(x) + \lambda_2 \varphi(f_2)(x) \\
&= (\lambda_1 \varphi(f_1) + \lambda_2 \varphi(f_2))(x) \text{ (par définition des opérations de } E)
\end{aligned}$$

et donc, $\varphi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \varphi(f_1) + \lambda_2 \varphi(f_2)$.

Ainsi, φ est un endomorphisme de E.

10) **a)** Chaque f_k, $k \in [\![0, n]\!]$, est bien dans E_n.
Soit alors f un élément de E_n. Il existe un polynôme $P = a_n X^n + \ldots + a_0$ tel que, pour tout réel x, $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$. Pour tout réel x, on a alors

$$f(x) = (a_n x^n + \ldots + a_0)e^{\alpha x} = a_n x^n e^{\alpha x} + \ldots + a_0 e^{i\alpha x} = a_n f_n(x) + \ldots + a_0 f_0(x).$$

Par suite, $f = a_n f_n + \ldots + a_0 f_0 \in \text{Vect}(\mathcal{F})$. Réciproquement, toute combinaison linéaire des f_k, $k \in [\![0, n]\!]$, est bien sûr dans E_n. Finalement $E_n = \text{Vect}(\mathcal{F})$.

Ainsi, la famille $\mathcal{F}$ est génératrice de E_n. Montrons que la famille $\mathcal{F}$ est libre.
Soit $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

$$\begin{aligned}
a_0 f_0 + \ldots + a_n f_n = [0] &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ a_0 f_0(x) + \ldots + a_n f_n(x) = 0 \\
&\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (a_0 + \ldots + a_n x^n) e^{i\alpha x} = 0 \\
&\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ a_0 + \ldots + a_n x^n = 0 \text{ (car } \forall x \in \mathbb{R},\ e^{i\alpha x} \neq 0) \\
&\Rightarrow a_0 = \ldots = a_n = 0
\end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F}$ est une famille libre et génératrice de E_n, et donc une base de E_n.

b) Posons $D = \{\lambda f_{n+1}, \lambda \in \mathbb{C}\} = \text{Vect}(f_{n+1})$. f est un élément de E_{n+1} si et seulement si f est la somme d'un élément de E_n et d'un élément de D. Donc, $E_{n+1} = E_n + D$.
Maintenant, si f est dans E_n et dans D, il existe $(\lambda_0, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+2}$ tel que $f = \lambda_0 f_0 + \ldots + \lambda_n f_n = \lambda_{n+1} f_{n+1}$. Mais alors, $\lambda_0 f_0 + \ldots + \lambda_n f_n - \lambda_{n+1} f_{n+1} = 0$, puis $\lambda_0 = \ldots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0$ (car la famille $(f_0, \ldots, f_n, f_{n+1})$ est libre, et enfin $f = 0$. Ceci montre que $E_n \cap D = \{0\}$ et donc que

$$\boxed{E_{n+1} = E_n \oplus D.}$$

11) a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Pour tout réel x, d'après la formule du binôme de Newton, on a

$$\varphi(f_k)(x) = f_k(x + 2\pi) = (x + 2\pi)^k e^{i\alpha(x+2\pi)} = \sum_{j=0}^{k} e^{2i\alpha\pi} \binom{k}{j} x^j (2\pi)^{k-j} e^{i\alpha x} = \left(\sum_{j=0}^{k} e^{2i\alpha\pi} \binom{k}{j} (2\pi)^{k-j} f_j \right)(x).$$

Donc,

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!],\ \varphi(f_k) = \sum_{j=0}^{k} e^{2i\alpha\pi} \binom{k}{j} (2\pi)^{k-j} f_j = e^{2i\alpha\pi} f_k + 2k\pi e^{2i\alpha\pi} f_{k-1} + \ldots + (2\pi)^k e^{2i\alpha\pi} f_0\ (*).}$$

b) Ainsi, pour chaque $k \in [\![0, n]\!]$, $\varphi(f_k) \in \text{Vect}(\mathcal{F}) = E_n$.
Mais alors, $\varphi(E_n) = \varphi(\text{Vect}(f_k)_{0 \leq k \leq n}) = \text{Vect}(\varphi(f_k))_{0 \leq k \leq n} \subset E_n$. La restriction de φ à E_n est donc un endomorphisme de E_n.

12) D'après la formule $(*)$ de la question 11)a), on a

$$\boxed{M = e^{2i\alpha\pi} \begin{pmatrix} 1 & 1.2\pi & \times & & & \times \\ 0 & 1 & 2.2\pi & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & \times \\ \vdots & & & \ddots & 1 & n.2\pi \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

13) Le déterminant de m est le déterminant de M. Puisque la matrice M est triangulaire supérieure, le déterminant de M est le produit de ses coefficients diagonaux. Donc, $\det(m) = (e^{2i\alpha\pi})^{n+1} = e^{2i\alpha(n+1)\pi}$, puis

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \det(m^p) = (\det(m))^p = e^{2i\alpha(n+1)p\pi}.}$$

14) L'entier p cherché est l'entier $p(\alpha) = \text{Min}(A_{n+1,\alpha})$ défini en 1). D'après 4), si on pose $|\alpha| = \dfrac{r}{s}$ avec $(r, s) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $r \wedge s = 1$, le plus petit entier naturel non nul tel que $\det(m^p) = 1$ est $\dfrac{s}{(n+1) \wedge s}$.

Partie 4 : changement de base

15) **a)** D'après 11)a), $m(f_0) = e^{2i\pi\alpha} f_0$ et donc, $\ell(f_0) = m(f_0) - e^{2i\pi\alpha} f_0 = [0]$.
b) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Toujours d'après 11)a),

$$\begin{aligned}\ell(f_{k+1}) &= \left(e^{2i\alpha\pi} f_{k+1} + 2(k+1)\pi e^{2i\alpha\pi} f_k + \ldots + (2\pi)^{k+1} e^{2i\alpha\pi} f_0\right) - e^{2i\alpha\pi} f_{k+1} \\ &= 2(k+1)\pi e^{2i\alpha\pi} f_k + \ldots + (2\pi)^{k+1} e^{2i\alpha\pi} f_0 \in E_k.\end{aligned}$$

De plus, la composante de $\ell(f_{k+1})$ sur f_k est bien $2(k+1)\pi e^{2i\alpha\pi}$.
c) D'après 15)a), f_0 est dans Ker(ℓ) et donc, puisque Ker(ℓ) est un sous-espace vectoriel de E, $E_0 = \text{Vect}(f_0) \subset \text{Ker}(\ell)$, ce qui établit le résultat pour $k = 0$.
Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Supposons que $E_k \subset \text{Ker}(\ell^{k+1})$.
D'après 10)b), $E_{k+1} = E_k + \text{Vect}(f_{k+1})$. Montrons alors que $E_k \subset \text{Ker}(\ell^{k+2})$ et $\text{Vect}(f_{k+1}) \subset \text{Ker}(\ell^{k+2})$.
Par hypothèse de récurrence, $E_k \subset \text{Ker}(\ell^{k+1})$ et d'après b), $\ell(f_{k+1}) \in E_k$. Donc, $\ell^{k+2}(f_{k+1}) = \ell^{k+1}(\ell(f_{k+1})) = 0$. Par suite, $f_{k+1} \in \text{Ker}(\ell^{k+2})$ et donc, puisque $\text{Ker}(\ell^{k+2})$ est un sous-espace vectoriel de E, $\text{Vect}(f_{k+1}) \subset \text{Ker}(\ell^{k+2})$.
D'autre part, on a $\text{Ker}(\ell^{k+1}) \subset \text{Ker}(\ell^{k+2})$ (si pour un élément f de E_n, on a $\ell^{k+1}(f) = 0$, alors $\ell^{k+2}(f) = \ell(\ell^{k+1}(f)) = \ell([0]) = [0]$, car ℓ est un endomorphisme de E_n). Mais alors, $E_k \subset \text{Ker}(\ell^{k+1}) \subset \text{Ker}(\ell^{k+2})$.
Finalement, on a $E_{k+1} = E_k + \text{Vect}(f_{k+1}) \subset \text{Ker}(\ell^{k+2}) + \text{Ker}(\ell^{k+2}) = \text{Ker}(\ell^{k+2})$ (car $\text{Ker}(\ell^{k+2})$ est un sous-espace vectoriel de E_n).
Le résultat est ainsi démontré par récurrence.

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!],\ E_k \subset \text{Ker}(\ell^{k+1}).}$$

d) Montrons le résultat par récurrence sur k.
Pour $k = 0$, $\ell^0(f_0) = f_0 = 0!(2\pi)^0 e^{2i.0.\pi\alpha} f_0$. Le résultat est donc vrai pour $k = 0$.
Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Supposons que $\ell^k(f_k) = \left(k!(2\pi)^k e^{2ik\pi\alpha}\right) f_0$. Alors,

$$\begin{aligned}\ell^{k+1}(f_{k+1}) &= \ell^k(\ell(f_{k+1})) \\ &= \ell^k(2(k+1)\pi e^{2i\alpha\pi} f_k + \ldots + (2\pi)^{k+1} e^{2i\alpha\pi} f_0) \text{ (d'après 15)b))} \\ &= \ell^k(2(k+1)\pi e^{2i\alpha\pi} f_k) \text{ (puisque } E_{k-1} \subset \text{Ker}(\ell^k)) \\ &= 2(k+1)\pi e^{2i\alpha\pi} \ell^k(f_k) \\ &= 2(k+1)\pi e^{2i\alpha\pi} \left(k!(2\pi)^k e^{2ik\pi\alpha}\right) f_0 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= \left((k+1)!(2\pi)^{k+1} e^{2i(k+1)\pi\alpha}\right) f_0\end{aligned}$$

Le résultat est ainsi démontré par récurrence.

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!],\ \ell^k(f_k) = k!(2\pi)^k e^{2ik\alpha\pi} f_0.}$$

e) En particulier, $\ell^n(f_n) = \left(n!(2\pi)^n e^{2in\pi\alpha}\right) f_0 \neq [0]$ et $\ell^{n+1}(f_n) = \left(n!(2\pi)^n e^{2in\pi\alpha}\right) \ell(f_0) = [0]$ (et donc pour $k \geq n+1$, $\ell^k(f_n) = [0]$).

16) m est un endomorphisme de E_n et il en est de même de ℓ. La famille $(\ell^n(f_n), \ell^{n-1}(f_n), \ldots, \ell(f_n), f_n)$ est donc bien une famille d'éléments de E_n. De plus, $\text{card}((\ell^k(f_n))_{0 \leq k \leq n}) = n + 1 = \dim(E_n) < +\infty$. Pour vérifier que la famille $(\ell^n(f_n), \ell^{n-1}(f_n), \ldots, \ell(f_n), f_n)$ est une base de E_n, il suffit de vérifier que cette famille est libre.

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. On suppose que $\lambda_0 f_n + \ldots + \lambda_n \ell^n(f_n) = [0]$. On prend l'image des deux membres de cette égalité par ℓ^n et on obtient $\lambda_0 \ell^n(f_n) = [0]$ (puisque pour $k \geq n+1$, $\ell^k(f_n) = [0]$) et donc $\lambda_0 = 0$ (puisque $\ell^n(f_n) \neq [0]$).
Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Supposons que pour $0 \leq j \leq k-1$ on ait $\lambda_j = 0$. Alors, $\lambda_k \ell^k(f_n) + \ldots + \lambda_n \ell^n(f_n) = [0]$ puis, en prenant l'image des deux membres par ℓ^{n-k}, $\lambda_k \ell^n(f_n) = [0]$ et donc $\lambda_k = 0$.
On a montré par récurrence que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\lambda_k = 0$.

La famille $(\ell^n(f_n), \ell^{n-1}(f_n), \ldots, \ell(f_n), f_n)$ est donc libre et finalement est une base de E_n.

17) Pour $0 \leq k \leq n-1$, $\ell(\ell^k(f_n)) = \ell^{k+1}(f_n)$ et d'autre part, $\ell(\ell^n(f_n)) = [0]$. La matrice L de ℓ relativement à la base $\mathcal{B}$ est donc

$$\boxed{L = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\ell) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}.}$$

18) Par suite,

$$\boxed{M' = L + \left(e^{2i\alpha\pi}\right) I_{n+1} = \begin{pmatrix} e^{2i\alpha\pi} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{2i\alpha\pi} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & e^{2i\alpha\pi} \end{pmatrix} = J_{e^{2i\alpha\pi}}.}$$

19) Il s'agit bien d'une application, application que l'on note ψ. Soit alors A un élément de $\mathbb{J}_{n+1}$. Par définition, le coefficient ligne 1, colonne 1 de A est de module 1. Soit θ un argument de ce coefficient, puis $\alpha = \dfrac{\theta}{2\pi}$. Il est clair que $\psi(\alpha) = A$.

Tout élément de $\mathbb{J}_{n+1}$ a donc un antécédent par ψ ce qui montre que ψ est surjective.

