Correction

1. $A\oplus C=B\oplus C$ donc $\dim A\oplus C=\dim B\oplus C$ d'où et $\dim A+\dim C=\dim B+\dim C$ puis $\dim A=\dim B$. De plus $A\oplus C=A+B$ donc $\dim A+\dim C=\dim A+\dim B-\dim A\cap B$ et par suite $\dim C=\dim B-\dim A\cap B=\dim A-\dim A\cap B$.

2.a Puisque $A\neq B$ et $\dim A=\dim B$ on a nécessairement $A\not\subset B$ (car inclusion et égalité des dimensions impliquent égalité des espaces). Par suite $\exists \vec{u}\in A$ tel que $\vec{u}\notin B$. De même pour $\vec{v}$.

2.b Si $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}\in A$ alors $\vec{v}=\vec{w}-\vec{u}\in A$ par opérations sur les vecteurs de A.
Par contraposée : $\vec{v}\notin A\Rightarrow \vec{w}\notin A$. De même $\vec{w}\notin B$ et donc $\vec{w}\notin A\bigcup B$.

2.c Soit $\vec{x}\in A\cap C$. Il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $\vec{x}=\lambda.\vec{w}$ et $\vec{x}\in A$
Si $\lambda\neq 0$ alors $\vec{w}=\dfrac{1}{\lambda}.\vec{x}\in A$ ce qui est exclu.
Nécessairement $\lambda=0$ et $\vec{x}=\vec{o}$. Ainsi A et C sont en somme directe.
$\dim A\oplus C=\dim A+\dim C=(n-1)+1=n=\dim E$ et donc $A\oplus C=E$
Or $A\subset A+B$, $C\subset A+B$ (car $\vec{w}\in A+B$) donc $E=A\oplus C\subset A+B$.
Par suite $A\oplus C=A+B=E$. De même $B\oplus C=A+B$.

3.a Si $A=B$ alors $A+B=A=B$. $C=\{\vec{o}\}$ résout le problème posé.

3.b $A\cap B$ est un sous-espace vectoriel de A qui est un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie non nulle.
Par suite $A\cap B$ possède un supplémentaire A' dans A.

3.c $A'\cap B'\subset A\cap B$ car $A'\subset A$ et $B'\subset B$.
Or $A'\cap(A\cap B)=\{\vec{o}\}$ car $A'\oplus(A\cap B)$ donc $A'\cap B'=\{\vec{o}\}$.
$\dim A=\dim A'+\dim A\cap B$ et $\dim B=\dim B'+\dim A\cap B$.
Puisque $\dim A=\dim B$ on a $\dim A'=\dim B'$.
De plus $A',B'\neq\{\vec{o}\}$ (car sinon on aurait $A=B$) donc $\dim A'=\dim B'=p\in\mathbb{N}^*$.

3.d A' et B' sont deux sous-espaces vectoriels de dimension finie $p\in\mathbb{N}^*$ donc possède des bases de la forme annoncée.

4.a Supposons $\lambda_1\vec{g}_1+\cdots+\lambda_p\vec{g}_p=\vec{o}$.
On a $\lambda_1\vec{e}_1+\cdots+\lambda_p\vec{e}_p=-(\lambda_1\vec{f}_1+\cdots+\lambda_p\vec{f}_p)$ or $\lambda_1\vec{e}_1+\cdots+\lambda_p\vec{e}_p\in A'$ et $\lambda_1\vec{f}_1+\cdots+\lambda_p\vec{f}_p\in B'$ avec $A'\cap B'=\{\vec{o}\}$ donc $\lambda_1\vec{e}_1+\cdots+\lambda_p\vec{e}_p=\lambda_1\vec{f}_1+\cdots+\lambda_p\vec{f}_p=\vec{o}$.
Puisque la famille $\mathcal{B}$ est libre, on a $\lambda_1=\ldots=\lambda_p=0$ donc $\mathcal{D}$ est libre.

4.b La famille $\mathcal{D}$ est une famille libre et génératrice de C, c'est donc une base de C.
Puisqu'elle est formée de p vecteurs on a : $\dim C=p$.

4.c Soit $\vec{x}\in A\cap C$.
$\vec{x}\in C$ donc on peut écrire $\vec{x}=\lambda_1\vec{g}_1+\cdots+\lambda_p\vec{g}_p=\vec{u}+\vec{v}$ avec $\vec{u}=\lambda_1\vec{e}_1+\cdots+\lambda_p\vec{e}_p\in A'$ et $\vec{v}=\lambda_1\vec{f}_1+\cdots+\lambda_p\vec{f}_p\in B'$.
On a alors $\vec{v}=\vec{x}-\vec{u}\in A$ car $\vec{x}\in A$ et $\vec{u}\in A'\subset A$. Mais $\vec{v}\in B'\subset B$ donc $\vec{v}\in A\cap B$.
Or $\vec{v}\in B'$ et $(A\cap B)\cap B'=\{\vec{o}\}$ donc $\vec{v}=\vec{o}$.
Puisque $\mathcal{C}$ est une base, on a $\lambda_1=\ldots=\lambda_p=0$ et par suite $\vec{u}=\vec{o}$ et donc $\vec{x}=\vec{o}$.

4.d $A\subset A+B$ et $C\subset A+B$ donc $A+C\subset A+B$.
De plus $\dim A\oplus C=\dim A+\dim C=\dim A+p=\dim A+\dim B-\dim A\cap B=\dim A+B$
donc $A\oplus C=A+B$.
De manière symétrique $A+B=B\oplus C$.