I. Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

I.A.

1. On a $\chi_{\mathrm{M}} = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{M}) = \det\left((\mathrm{XI}_n - \mathrm{M})^\top\right) = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{M}^\top) = \chi_{\mathrm{M}^\top}$ donc

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \in \mathrm{sp}(\mathrm{M}) \Leftrightarrow \chi_{\mathrm{M}}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \chi_{\mathrm{M}^\top}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{sp}\left(\mathrm{M}^\top\right)$$

Ainsi $\mathrm{sp}(\mathrm{M}) = \mathrm{sp}\left(\mathrm{M}^\top\right)$ et donc $\boxed{\text{M et } \mathrm{M}^\top \text{ ont même spectre}}$

2. $\Leftarrow$: On suppose que M est diagonalisable.
   Ceci q nous fournit $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que $\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1}$
   donc $\mathrm{M}^\top = \left(\mathrm{P}^{-1}\right)^\top \mathrm{D}^\top \mathrm{P}^\top = \left(\mathrm{P}^\top\right)^{-1} \mathrm{DP}^\top$ d'où $\mathrm{M}^\top$ est diagonalisable

   $\Rightarrow$: On suppose que $\mathrm{M}^\top$ est diagonalisable.
   Pour montrer que M est diagonalisable, on utilise l'implication précédente en remarquant que $\mathrm{M} = \left(\mathrm{M}^\top\right)^\top$.

   On a bien montré que $\boxed{\mathrm{M}^\top \text{ est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable}}$

I.B. Matrices compagnons

3. On a $\chi_{\mathrm{C_Q}}(\mathrm{X}) = \det\left(\mathrm{XI}_n - \mathrm{C_Q}\right) = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & \dots & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & \mathrm{X} & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & \mathrm{X} & a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \mathrm{X} + a_{n-1} \end{vmatrix}$

   On effectue alors les opérations élémentaires pour i allant de $n-1$ à 1 : $\mathrm{L}_i \longleftarrow \mathrm{L}_i + \mathrm{XL}_{i+1}$:

$$\chi_{\mathrm{C_Q}}(\mathrm{X}) = \begin{vmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \mathrm{Q}(\mathrm{X}) \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \mathrm{X}^{n-1} + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-2} + \dots + a_2\mathrm{X} + a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & 0 & \mathrm{X}^2 + a_{n-1}\mathrm{X} + a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \mathrm{X} + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

   On développe ensuite selon la première ligne pour obtenir :

$$\chi_{\mathrm{C_Q}}(\mathrm{X}) = (-1)^{n+1}\mathrm{Q}(\mathrm{X}) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}\mathrm{Q}(\mathrm{X})(-1)^{n-1}$$

   Ainsi $\boxed{\text{Q est le polynôme caractéristique de } \mathrm{C_Q}}$

4. On a $(\mathrm{C_Q})^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

   On a $\chi_{\mathrm{C_Q}^\top} = \chi_{\mathrm{C_Q}} = \mathrm{Q}$ ainsi $\mathrm{Q}(\lambda) = 0$.

   Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

$$(\mathrm{C_Q})^\top \mathrm{X} = \lambda \mathrm{X} \iff \begin{cases} x_2 & = \lambda x_1 \\ x_3 & = \lambda x_2 \\ \vdots & \\ x_n & = \lambda x_{n-1} \\ -a_0 x_1 & - \ldots - a_{n-1} x_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ (-a_0 - a_1\lambda - \ldots - a_{n-1}\lambda^{n-1}) x_1 = \lambda^n x_1 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } (\mathrm{C_Q})^\top \mathrm{X} = \lambda \mathrm{X} \iff \begin{cases} \forall i \in [\![2, n]\!],\ x_i = \lambda^{i-1} x_1 \\ \mathrm{Q}(\lambda) x_1 = 0 \end{cases}$$

   Notez bien que le "ainsi" concerne toute l'équivalence !

   Comme λ est racine de Q, alors $\boxed{\dim\left(\mathrm{E}_\lambda\left(\mathrm{C_Q}^\top\right)\right) = 1,\ \mathrm{E}_\lambda\left(\mathrm{C_Q}^\top\right) = \mathrm{vect}(\mathrm{X}_\lambda) \text{ où } \mathrm{X}_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}}$

I.C. Endomorphismes cycliques

5. **$\Rightarrow$:** On suppose que f est cyclique.

   Ceci nous fournit $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $\mathcal{B} = \left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ soit une base de E

   Il existe alors $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $f^n(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0)$

   Je pose alors $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^n + \sum_{i=0}^{n-1} (-\lambda_i) \mathrm{X}^i \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$

   de sorte que Q est unitaire de degré n et $\mathcal{M}_\mathcal{B}(f) = \mathrm{C_Q}$

   $\Leftarrow$: On suppose qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \ldots e_{n-1})$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $\mathrm{C_Q}$, où Q est un polynôme unitaire de degré n

   Ainsi $\forall i \in [\![0, n-2]\!],\ f(e_i) = e_{i+1}$

   donc $(e_0, f(e_0), f^2(e_0), \ldots, f^{n-1}(e_0))$ est une base de E et donc f est cyclique

   $\boxed{f \text{ est cyclique si et seulement s'il existe une base } \mathcal{B} \text{ de E dans laquelle la matrice de } f \text{ est de la forme } \mathrm{C_Q} \text{ où Q est un polynôme unitaire de degré } n}$

6. **$\Leftarrow$:** On suppose que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.

   Ainsi $|\mathrm{sp}(f)| = \deg(\chi_f) = \dim \mathrm{E}$

   donc f est diagonalisable d'après le cours

$\Leftarrow$ **:** On suppose que f est diagonalisable. Comme f est cyclique,
ceci nous fournit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ unitaire de degré n tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{C_Q}$ d'après 5.
Ainsi $\mathrm{C_Q}$ est diagonalisable et il en est de même pour ${\mathrm{C_Q}}^\top$ d'après 2
Ainsi $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(f)} \mathrm{E}_\lambda\left({\mathrm{C_Q}}^\top\right)$ d'où $n = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}\left({\mathrm{C_Q}}^\top\right)} \dim\left(\mathrm{E}_\lambda\left({\mathrm{C_Q}}^\top\right)\right)$
or on a $\forall \lambda \in \mathrm{sp}\left({\mathrm{C_Q}}^\top\right),\ \dim\left(\mathrm{E}_\lambda\left({\mathrm{C_Q}}^\top\right)\right) = 1$ d'après 4 donc $\left|\mathrm{sp}\left({\mathrm{C_Q}}^\top\right)\right| = n$
or d'après 1 : $\mathrm{sp}\left({\mathrm{C_Q}}^\top\right) = \mathrm{sp}\left(\mathrm{C_Q}\right) = \mathrm{sp}\left(f\right)$
donc f admet n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$
donc χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples

Ainsi $\boxed{f \text{ est diagonalisable si et seulement si } \chi_f \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \text{ et a toutes ses racines simples}}$

7. On suppose que f est cyclique.
Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f^i = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$. Montrons $\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ \lambda_i = 0$
Comme f est cyclique, ceci nous fournit $x \in \mathrm{E}$ tel que $\mathcal{B} = (x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E
donc $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f^i(x) = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}(x) = 0_\mathrm{E}$
ainsi $\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ \lambda_i = 0$ car $\mathcal{B}$ est libre
Alors $\boxed{(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1}) \text{ est libre dans } \mathcal{L}(\mathrm{E})}$

Je note d le degré de π_f. D'après le cours on a $d = \dim(\mathbb{K}[f])$.
Or $(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathbb{K}[f]$ donc $d \geqslant n$
de plus d'après Cayley-Hamilton, on a χ_f est annulateur de f
d'où $\pi_f \mid \chi_f$ or ce sont des polynômes non nuls ainsi on a $d = \deg(\pi_f) \leqslant \deg(\chi_f) = n$
ainsi $n = d$ d'où $\boxed{\text{le polynôme minimal de } f \text{ est de degré } n}$

*On ne se sert pas de cette question pour montrer le théorème de Cayley-Hamilton dans le paragraphe **I.D** qui suit.*

I.D. Application à une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

8. On note $\mathrm{N}_x = \left\{m \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, \left(f^i(x)\right)_{0 \leqslant i \leqslant m-1} \text{ libre}\right\}$.
On sait que $1 \in \mathrm{N}_x$ car $x \neq 0_\mathrm{E}$ et que $\forall m \geqslant n,\ m \notin \mathrm{N}_x$ car $\dim \mathrm{E} = n$
Ainsi N_x est une partie de $\mathbb{N}^*$ non vide majorée par $n-1$
donc N_x admet un plus grand élément $p \in \mathbb{N}^*$.
Ainsi la famille $\left(f^i(x)\right)_{0 \leqslant i \leqslant p-1}$ est libre et la famille $\left(f^i(x)\right)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ est liée

On a bien l'existence de $p \in \mathbb{N}^*$ et de $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tels que la famille $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre et $\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) + f^p(x) = 0$

9. On a $f\left(\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))\right) = \mathrm{Vect}(f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots, f^p(x))$ car f linéaire
or $f^p(x) = -\alpha_0 x - \alpha_1 f(x) + \cdots - \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) \in \mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$
d'où $f\left(\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))\right) \subset \mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$
Ainsi $\boxed{\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x)) \text{ est stable par } f}$

10. Je note alors $\tilde{f}$ l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$
D'après ce qui précède $\mathcal{B} = \big(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x)\big)$ est une base de $\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$
On remarque que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\tilde{f}) = \mathrm{C_Q}$ en notant $\mathrm{Q} = \alpha_0 + \alpha_1 \mathrm{X} + \cdots + \alpha_{p-1}\mathrm{X}^{p-1} + \mathrm{X}^p$
d'où $\chi_{\tilde{f}} = \mathrm{Q}$ or $\chi_{\tilde{f}} | \chi_f$ car $\tilde{f}$ induit par f
On a montré que $\boxed{\mathrm{X}^p + \alpha_{p-1}\mathrm{X}^{p-1} + \cdots + \alpha_0 \text{ divise le polynôme } \chi_f}$

11. En reprenant les notations précédentes, on a $\mathrm{Q}(f)(x) = 0$ et il existe $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{PQ} = \chi_f$
Ainsi $\chi_f(f) = \mathrm{P}(f) \circ \mathrm{Q}(f)$ donc $\chi(f)(x) = \mathrm{P}(f)\,[\mathrm{Q}(f)(x)] = \mathrm{P}(f)(0) = 0$ car $\mathrm{P}(f)$ linéaire
On a ainsi montré que : $\forall x \in \mathrm{E},\ \chi(f)(x) = 0$
or $\chi(f) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ d'où $\boxed{\chi_f(f) \text{ est l'endomorphisme nul}}$

II. Etude des endomorphismes cycliques

II.A. Endomorphismes cycliques nilpotents

12. $\Rightarrow$ **:** On suppose f cyclique alors $\deg(\pi_f) = n$ d'après 7
De plus d'après le cours, $\chi_f = \mathrm{X}^n$ car f nilpotente
or $\pi_f | \chi_f$ selon Cayley-Hamilton et π_f est unitaire par définition
donc $\pi_f = \mathrm{X}^n$
ainsi $f^n = 0$ et $\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ f^i \neq 0$
d'où $r = n$

$\Leftarrow$ **:** On suppose que $r = n$ donc $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$
Ceci nous fournit $x \in \mathrm{E}$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$
Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x) = 0$.
On montre que $\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ \lambda_i = 0$
On suppose, par l'absurde, que la propriété est fausse
Je note alors j le minimum de $\{i \in [\![0, n-1]\!] \mid \lambda_i \neq 0\}$
Ainsi $0 = f^{n-1-j}\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x)\right) = f^{n-1-j}\left(\displaystyle\sum_{i=j}^{n-1} \lambda_i f^i(x)\right) = \lambda_j f^{n-1}(x) + \displaystyle\sum_{i=j}^{n-1} \lambda_i f^{n-1+i-j}(x)$
Or $\forall i \geqslant p,\ f^i(x) = 0$ donc $\lambda_j f^{n-1}(x) = 0$ et $\lambda_j \neq 0$
d'où $f^{n-1}(x) = 0$ ce qui est absurde
Ainsi $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une famille libre composée de n vecteurs de E et $\dim \mathrm{E} = n$
donc $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une base de E
donc f est cyclique.

On a montré que $\boxed{f \text{ est cyclique si et seulement si } r = n}$
On remarque que la matrice compagnon associée est unique car les coefficients de cette matrices sont donnés par ceux du polynôme caractéristique.
On sait que si f est cyclique et nilpotente, alors $\chi_f = \mathrm{X}^n$

ainsi $\boxed{\text{la matrice compagnon de } f \text{ dans ce cas est } \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

II.B.

13. Pour $k \in [\![1,p]\!]$, $(f-\lambda_k \mathrm{Id}_\mathrm{E})^{m_k}$ et f commutent car $\mathbb{C}[f]$ est une algèbre commutative
donc $\boxed{\mathrm{F}_k = \mathrm{Ker}((f-\lambda_k \mathrm{Id}_\mathrm{E})^{m_k}) \text{ est stable par } f}$
On a $\chi_f(\mathrm{X}) = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} (\mathrm{X}-\lambda_k)^{m_k}$ et les polynômes $(\mathrm{X}-\lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux
Alors selon le lemme de décomposition des noyaux, on a
$$\mathrm{Ker}\,(\chi_f(f)) = \mathrm{Ker}((f-\lambda_1 \mathrm{Id}_\mathrm{E})^{m_1}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}((f-\lambda_p \mathrm{Id}_\mathrm{E})^{m_p}) = \mathrm{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_p$$
de plus selon Cayley-Hamilton, $\chi_f(f) = 0$ et donc $\mathrm{Ker}\,(\chi_f(f)) = \mathrm{E}$
d'où $\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_p}$
14. Soit $x \in \mathrm{F}_k$. On a $(f-\lambda_k \mathrm{Id})^{m_k}(x) = 0$
Pour tout $y \in \mathrm{F}_k$, on a $(f-\lambda_k \mathrm{Id})(y) = \varphi_k(y) \in \mathrm{F}_k$
ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(f-\lambda_k \mathrm{Id})^p(x) = \varphi_k^p(x)$ par récurrence immédiate sur p
donc $\varphi_k^{m_k}(x) = 0$, comme c'est vrai pour tout $x \in \mathrm{F}_k$, on conclut que $\boxed{\varphi_k \text{ est un endomorphisme nilpotent de } \mathrm{F}_k}$
15. D'après le cours, l'indice de nilpotence de φ_k, endomorphisme de F_k est majoré par $\dim \mathrm{F}_k$
ainsi $\boxed{\nu_k \leqslant \dim(\mathrm{F}_k)}$
16. Je note $\mathrm{P} = \displaystyle\prod_{i=1}^{p} (\mathrm{X}-\lambda_i)^{\nu_i}$. Soit $k \in [\![1,p]\!]$. Soit $x \in \mathrm{F}_k$.
On a $\mathrm{P}(f) = \left[\displaystyle\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{p} (\mathrm{X}-\lambda_i)^{\nu_i}(f)\right] \circ (f-\lambda_k \mathrm{Id})^{\nu_k}$
donc $\mathrm{P}(f)(x) = \left[\displaystyle\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{p} (\mathrm{X}-\lambda_i)^{\nu_i}(f)\right] \left(\varphi_k^{\nu_k}(x)\right) = \left[\displaystyle\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{p} (\mathrm{X}-\lambda_i)^{\nu_i}(f)\right] (0) = 0$
donc $\mathrm{P}(f)$ coïncide avec l'endomorphisme nul sur chaque F_k et $\mathrm{E} = \mathrm{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_p$ d'après 13
donc $\mathrm{P}(f) = 0$
Je note d le degré de P comme P est unitaire alors $(\mathrm{Id}, f, f^2, \dots, f^d)$ est liée
donc $d \geqslant n$ car $(\mathrm{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre
or $d = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \nu_i$ d'où $n \leqslant \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \nu_i$
On remarque à l'aide de la question 14 que $\nu_k \leqslant m_k$ pour tout $k \in [\![1,p]\!]$
donc $n \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \nu_k \leqslant \sum_{i=0}^{p} m_k = n$
ainsi les inégalités sont des égalités et $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![1,p]\!], \text{ on a } \nu_k = m_k}$

17. Comme $\mathrm{E} = \mathrm{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_p$ d'après 13 et $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\nu_k \leqslant \dim \mathrm{F}_k$ d'après 15

    on a donc avec la question précédente $n = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \nu_k \leqslant \sum_{k=1}^{p} \dim(\mathrm{F}_k) = n$

    Comme à la question précédente, on obtient : $\boxed{\forall k \in [\![1,p]\!],\ \nu_k = m_k = \dim(\mathrm{F}_k)}$

    φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k d'indice $\nu_k = m_k = \dim(\mathrm{F}_k)$
    donc selon 12, φ_k est nilpotent et cyclique.

    ceci nous fournit une base $\mathcal{B}_k$ de F_k tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_k}(\varphi_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{C})$

    En notant f_k l'endomorphisme induit par f sur F_k,

    on a alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_k}(f_k) = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_k & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \lambda_k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda_k & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{C})$

    En concaténant les bases $\mathcal{B}_k$ pour k allant de 1 à p
    On obtient une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition en somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_p$
    ainsi $\boxed{\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n) \text{ est une base de E dans laquelle } f \text{ a une matrice diagonale par blocs de formes voulues}}$

    <u>Remarque :</u> pour la suite on peut démontrer que pour une telle base on a nécessairement :

    $$\forall k \in [\![1,p]\!],\ (f - \lambda_k \mathrm{Id})^{m_k}(u_{m_1+\cdots+m_{k-1}+1}) = 0 \text{ puis}$$

    $$\forall k \in [\![1,p]\!],\ \forall i \in [\![1,m_k]\!],\ u_{m_1+\cdots+m_{k-1}+i} \in \mathrm{F}_k$$

    On peut aussi supposer que l'on travaille avec la base choisie.

18. Pour $k \in [\![1,p]\!]$, on a $u_{m_1+\cdots+m_{k-1}+1} \in \mathrm{F}_k$
    ainsi $\forall i \in \mathbb{N},\ f^i(u_{m_1+\cdots+m_{k-1}+1}) \in \mathrm{F}_k$ car F_k stable par f
    puis pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, on a $\mathrm{P}(f)(u_{m_1+\cdots+m_{k-1}+1}) \in \mathrm{F}_k$ car F_k est stable par combinaison linéaire.

    Et ainsi $\mathrm{P}(f)(x_0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \mathrm{P}(f)(u_{m_1+\cdots+m_{k-1}+1})$ est la décomposition de $\mathrm{P}(f)(x_0)$ sur $\mathrm{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_p$

    Soit $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. On a donc $\mathrm{Q}(f)(x_0) = 0 \Longleftrightarrow \forall k \in [\![1,p]\!],\ \mathrm{Q}(f)(e_k) = 0$

    Je note $e_k = u_{m_1+\cdots+m_{k-1}+1}$ et on a $\mathcal{B}_k = (e_k, \varphi_k(e_k), \dots, \varphi_k^{m_k-1}(e_k))$ est une base de F_k
    On a vu que la matrice de φ_k dans cette base est $\mathrm{C}_{\mathrm{X}^{m_k}}$
    donc $\pi_{\varphi_k} = \mathrm{X}^{m_k}$ car φ_k est cyclique et nilpotent et $\dim(\mathrm{F}_k) = m_k$ selon 12

    $$\forall k \in [\![1,p]\!],\ (f - \lambda_k \mathrm{Id})^{m_k}(u_{m_1+\cdots+m_{k-1}+1}) = 0 \text{ puis}$$

$$\forall k \in [\![1,p]\!],\ \forall i \in [\![1,m_k]\!],\ u_{m_1+\cdots+m_{k-1}+i} \in \mathrm{F}_k$$

Par ailleurs on montre facilement que

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}], \mathrm{P}(\varphi_k) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{P}(\varphi_k)(e_k) = 0$$

car $\mathrm{P}(\varphi_k)$ commute avec tout φ_k^i et que $\left(\varphi_k^i(e_k)\right)_{0\leqslant i<m_k}$ est une base de F_k.
Par ailleurs on a $\mathrm{Q}(\varphi_k) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{X}^{m_k}|\mathrm{Q}$ (nilpotent et cyclique)
donc $\mathrm{Q}(f)(e_k) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Q}(\varphi_k + \lambda_k \mathrm{Id}_{\mathrm{F}_k})(e_k) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{X}^{m_k}|\mathrm{Q}(\mathrm{X}+\lambda_k)$
ainsi $\mathrm{Q}(f)(e_k) = 0 \Longleftrightarrow (\mathrm{X}-\lambda_k)^{m_k}|\mathrm{Q}(\mathrm{X})$
donc comme les $(\mathrm{X}-\lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux,
on a finalement $\boxed{\mathrm{Q}(f)(x_0) = 0 \Longleftrightarrow \prod_{k=1}^{p}(\mathrm{X}-\lambda_k)^{m_k}|\mathrm{Q}}$

19. Soit $(\lambda_i)_{0\leqslant i\leqslant n-1} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i f^i(x_0) = 0$ Je note $\mathrm{Q} = \sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i \mathrm{X}^i$ de sorte que $\mathrm{Q}(f)(x_0) = 0$
ainsi $\prod_{k=1}^{p}(\mathrm{X}-\lambda_k)^{m_k}|\mathrm{Q}$ d'après la question précédente or $\deg(\mathrm{Q}) \leqslant n-1 < n = \deg\left(\prod_{k=1}^{p}(\mathrm{X}-\lambda_k)^{m_k}\right)$
donc Q est le polynôme nul et ainsi $\forall i \in [\![0,n-1]\!],\ \lambda_i = 0$
donc $\left(f^i(x_0)\right)_{0\leqslant i\leqslant n-1}$ est une famille libre de n vecteurs de E et $n = \dim \mathrm{E}$
d'où $\left(f^i(x_0)\right)_{0\leqslant i\leqslant n-1}$ est une base de E ce qui justifie que $\boxed{f \text{ est cyclique}}$

III. Endomorphismes commutants, décomposition de Frobenius

20. L'application $g \longmapsto f\circ g - g\circ f$ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ dont le noyau est $\mathrm{C}(f)$
Ainsi $\mathrm{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$

De plus, soit g et $h \in \mathrm{C}(f)$. On a $(g\circ h)\circ f = g\circ f\circ h = f\circ(g\circ h)$
ainsi $\mathrm{C}(f)$ est stable par $\circ$ et il est clair que $\mathrm{Id} \in \mathrm{C}(f)$
Ainsi $\boxed{\mathrm{C}(f) \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{L}(\mathrm{E})}$

III.A. Commutant d'un endomorphisme cyclique

21. On a $g(x_0) \in \mathrm{E}$ et $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.
d'où $\boxed{\text{l'existence de } \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \text{ de } \mathbb{K} \text{ tels que } g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k f^k(x_0)}$

22. Il suffit d'établir que les applications linéaires g et $\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k f^k$ coïncident sur la base $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$.
On montre par récurrence immédiate que $\forall i \in \mathbb{N},\ g \in \mathrm{C}\left(f^i\right)$
Soit $i \in [\![0,n-1]\!]$. En utilisant 21 et le fait que l'algèbre $\mathbb{K}[f]$ est commutative

$$g\left(f^i(x_0)\right) = f^i\left(g(x_0)\right) = f^i\left(\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k f^k(x_0)\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k f^k\left(f^i(x_0)\right)$$

donc $g = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k$ et $\boxed{g \in \mathbb{K}[f]}$

23. On vient d'établir le sens direct (avec un polynôme de degré $\leqslant n-1$)
La réciproque vient du fait que $\mathbb{K}[f]$ est une algèbre commutative et que $\mathbb{K}_{n-1}[\mathrm{X}] \subset \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $f \in \mathbb{K}[f]$.
On conclut que

$$\boxed{g \in \mathrm{C}(f) \text{ si et seulement s'il existe un polynôme } \mathrm{R} \in \mathbb{K}_{n-1}[\mathrm{X}] \text{ tel que } g = \mathrm{R}(f)}$$

III.B. Décomposition de Frobenius

24. On suppose que $\mathrm{G} = \mathrm{F}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{F}_r$ est un sous espace de E.
Par l'absurde, je suppose qu'aucun des sous-espaces F_i ne contient tous les autres.
Ainsi $r \geqslant 2$ et $\mathrm{G} \neq \{0\}$.

Méthode 1 : Quitte à réduire le nombre, on peut supposer qu'aucun F_i n'est inclus dans la réunion des autres. Cela nous fournit $x_1 \in \mathrm{F}_1$ qui n'est dans aucun des F_i pour $i \geqslant 2$.
Sinon, $\mathrm{F}_1 \neq \mathrm{G}$ et on peut aussi trouver $y \in \mathrm{G} \setminus \mathrm{F}_1$.
Pour tout scalaire λ, on a $y + \lambda x_1 \notin \mathrm{F}_1$ (car sinon $y \in \mathrm{F}_1$) et ainsi $y + \lambda x_1 \in \mathrm{F}_2 \cup \cdots \cup \mathrm{F}_r$.
La droite affine $y + \mathbb{K}x_1$ est donc incluse dans $\mathrm{F}_2 \cup \cdots \cup \mathrm{F}_r$ et contient une infinité d'éléments
car $\mathbb{K}$ est infini et $t \in \mathbb{K} \mapsto y + tx_1$ est injective car $x_1 \neq 0$
Ceci nous fournit $j \in [\![2, r]\!]$ et $\lambda \neq \lambda'$ dans $\mathbb{K}$ tel que $y + \lambda x_1 \in \mathrm{F}_j$ et $y + \lambda' x_1 \in \mathrm{F}_j$
donc $x_1 \in \mathrm{F}_j$ (par combinaison linéaire) ce qui est absurde
Méthode 2 : Comme G est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, on peut munir G d'une norme.
De plus les notions topologiques sur G sont indépendantes du choix de la norme car $\dim \mathrm{G} < +\infty$.
Comme les F_i sont des sous-espaces de G de dimensions finies, ce sont des fermés de G.
Soit $i \in [\![1, r]\!]$. Comme $\mathrm{F}_i \neq \mathrm{G}$, cela nous fournit $e \in \mathrm{G} \setminus \mathrm{F}_i$.
Soit $x \in \mathrm{F}_i$. On a alors : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ x + \frac{1}{p} e \notin \mathrm{F}_i$
Pour toute boule B_x centré en x, il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*,\ x + \frac{1}{p_0} e \in \mathrm{B}_x$ car $\left(x + \frac{1}{p_0} e\right)_{p \geqslant 1}$ converge vers x
Ainsi relativement à G, les F_i sont des fermés d'intérieurs vides.
Donc pour $i \in [\![1, r]\!]$, $\Omega_i = \mathrm{G} \setminus \mathrm{F}_i$ un ouvert dense dans G
On pose $\mathrm{V}_i = \displaystyle\bigcap_{j=1}^{i} \Omega_j$
On montre par récurrence finie que les V_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ sont des ouverts non vides de G
Pour l'initialisation c'est évident car $\mathrm{V}_1 = \Omega_1$ est dense dans G.
Pour l'hérédité, on suppose pour $i < r$ que V_i est un ouvert non vide
on a $\mathrm{V}_{i+1} = \mathrm{V}_i \bigcap \Omega_{i+1}$ est un ouvert (intersection de deux ouverts) et non vide car $\mathrm{V}_i \neq \emptyset$ et Ω_{i+1} dense
donc $\mathrm{V}_r \neq \emptyset$ et $\mathrm{V}_r = \mathrm{G} \setminus \left(\displaystyle\bigcup_{j=1}^{r} \mathrm{F}_j\right) = \emptyset$ ce qui est absurde
Ainsi $\boxed{\text{l'un des sous-espaces } \mathrm{F}_i \text{ contient tous les autres}}$

Remarque : Pour $r = 2$, il existe une preuve classique purement algébrique. Pour le cas général, la preuve doit utiliser le fait que $\mathbb{K}$ est infini.
En effet, si je prends le corps $\mathrm{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathrm{E} = \mathrm{K}^2$, $\mathrm{F}_1 = \mathrm{Vect}\left((1,0)\right)$, $\mathrm{F}_2 = \mathrm{Vect}\left((0,1)\right)$ et $\mathrm{F}_3 = \mathrm{Vect}\left((1,1)\right)$.
On a $\mathrm{E} = \mathrm{F}_1 \bigcup \mathrm{F}_2 \bigcup \mathrm{F}_3$ et pourtant aucun des sous-espaces F_i ne contient tous les autres.

25. Soit $x \in \mathrm{E}$ On considère l'application $\varphi_x : \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] \longmapsto \mathrm{P}(f)(x) \in \mathrm{E}$.
Comme $\mathrm{I}_x = \{\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}] / \ \mathrm{P}(f)(x) = 0\}$ est le noyau de l'application linéaire φ_x,
I_x un sous groupe de $(\mathbb{K}[\mathrm{X}], +)$
Pour $\mathrm{P} \in \mathrm{I}_x$ et $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, on a $\mathrm{QP} \in \mathrm{I}_x$
car $(\mathrm{QP})(f)(x) = (\mathrm{Q}(f) \circ \mathrm{P}(f))(x) = \mathrm{Q}(f)(\mathrm{P}(f)(x)) = 0$ car $\mathrm{Q}(f) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$
d'où I_x est un idéal de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ comme $\pi_f \in \mathrm{I}_x$, cet idéal est non réduit à $\{0\}$
ce qui nous fournit $\pi_{f,x} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ unitaire (donc non nul) tel que $\mathrm{I}_x = (\pi_{f,x}) = \{\pi_{f,x}\mathrm{P} \mid \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]\}$
On remarque que : $\forall x \in \mathrm{E},\ \pi_{f,x} | \pi_f$

Si on écrit $\pi_f = \prod_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{P}_i^{\alpha_i}$ décomposition en facteurs irréductibles, où $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, les P_i sont irréductibles unitaires et distincts deux à deux et enfin les $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$.
Alors le nombre de diviseurs unitaires de π_f est $\prod_{k=1}^{\mathrm{N}} (\alpha_i + 1)$
Ainsi l'ensemble $\{\pi_{f,x} \mid x \in \mathrm{E}\}$ est fini de cardinal noté r où $r \in [\![1, \prod_{k=1}^{\mathrm{N}} (\alpha_i + 1)]\!]$
On peut donc choisir $u_1, \dots u_r \in \mathrm{E}$, tel que $\{\pi_{f,x} \mid x \in \mathrm{E}\} = \{\pi_{f,u_i} \mid i \in [\![1, r]\!]\}$
Ainsi $\mathrm{E} = \bigcup_{i=1}^{r} \ker(\pi_{f,u_i}(f))$ car $\forall x \in \mathrm{E},\ x \in \ker(\pi_{f,x}(f))$
La question 24 nous fournit $i_0 \in [\![1, r]\!]$ tel que $\ker(\pi_{f,u_{i_0}}(f)) = \mathrm{E}$
On note $x_1 = u_{i_0}$ et on a $\ker(\pi_{f,x_1}(f)) = \mathrm{E}$
On remarque que $\pi_{f,x_1}(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$ donc $\pi_f | \pi_{f,x_1}$
or $\pi_{f,x_1} | \pi_f$ et ce sont des polynômes unitaires
donc $\pi_{f,x_1} = \pi_f$ Finalement

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}],\ \mathrm{P}(f)(x_1) = 0 \Longleftrightarrow \pi_f | \mathrm{P}$$

en faisant comme en 19, on montre que $\boxed{(x_1, f(x_1), \dots, f^{d-1}(x_1)) \text{ est libre}}$

26. En faisant comme en 9, on montre que $\boxed{\mathrm{E}_1 \text{ est stable par } f}$
De plus, on a $\mathrm{E}_1 = \{\mathrm{P}(f)(x_1) / \ \mathrm{P} \in \mathbb{K}_{d-1}[\mathrm{X}]\} \subset \{\mathrm{P}(f)(x_1) / \ \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]\}$
Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Comme $\pi_f \neq 0$,
le théorème de la division euclidienne nous fournit Q et $\mathrm{R} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tels que $\begin{cases} \mathrm{P} = \mathrm{Q}\pi_f + \mathrm{R} \\ \deg(\mathrm{R}) < d = \deg(\pi_f) \end{cases}$
On a alors $\mathrm{P}(f)(x_1) = [\mathrm{Q}(f) \circ \pi_f(f)](x_1) + \mathrm{R}(f)(x_1) = \mathrm{R}(f)(x_1) \in \{\mathrm{T}(f)(x_1) / \ \mathrm{T} \in \mathbb{K}_{d-1}[\mathrm{X}]\}$
On conclut que $\boxed{\mathrm{E}_1 = \{\mathrm{P}(f)(x_1) / \ \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]\}}$

27. D'après ce qui précède $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_d)$ est une base de E_1.
De plus on a $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\psi_1) = \mathrm{C}_{\pi_f}$ matrice compagnon du π_f polynôme unitaire de degré $d = \dim(\mathrm{E}_1)$
alors d'après 5, $\boxed{\psi_1 \text{ est cyclique}}$

28. Pour $i \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{F}_i = \mathrm{Ker}\left(\Phi \circ f^i\right)$ ainsi $\mathrm{F} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{F}_i$ est bien un sous-espace de E
De plus, on a pour $i \geqslant 1$, $f(\mathrm{F}_i) \subset \mathrm{F}_{i-1}$ donc

$$f(\mathrm{F}) \subset f\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} \mathrm{F}_i\right) \subset \bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} f(\mathrm{F}_i) \subset \bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} \mathrm{F}_{i-1} = \mathrm{F}$$

d'où $\boxed{\text{F est stable par } f}$

Soit $u \in \mathrm{E}_1 \cap \mathrm{F}$.

Comme $u \in \mathrm{E}_1$, cela nous fournit $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{K}$ tels que $u = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k e_k$

or $\Phi(x) = \lambda_d$ et $\Phi(f^0(x)) = 0$ car $u \in \mathrm{F}$, donc $\lambda_d = 0$ d'où $u = \sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k e_k$

puis $f(u) = \sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k e_{k+1}$ et donc $\lambda_{d-1} = 0$ et $f(u) = \sum_{k=1}^{d-2} \lambda_k e_{k+1}$

En réitérant le procédé, on trouve $\lambda_{d-2} = \ldots = \lambda_1 = 0$

donc $u = 0$

L'autre inclusion étant évidente, on a $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{F} = \{0\}$ d'où $\boxed{\mathrm{E}_1 \text{ et F sont en somme directe}}$

29. Je note Ψ_1 l'application linéaire induite par Ψ entre E_1 et $\mathbb{K}^d$.
    Soit $x \in \mathrm{Ker}(\Psi_1)$.
    On a $x \in \mathrm{E}_1$ et $\Phi(x) = \Phi(f(x)) = \cdots = \Phi(f^{d-1}(x)) = 0$.
    En faisant comme à la question précédente, on obtient $x = 0$
    L'autre inclusion étant évidente, on a $\mathrm{Ker}(\Psi_1) = \{0\}$
    Ainsi Ψ_1 est une application linéaire injective entre E_1 et $\mathbb{K}^d$ or $\dim(\mathrm{E}_1) = d = \dim(\mathbb{K}^d)$
    En utilisant le théorème du rang, on obtient que Ψ_1 est surjective puis bijective
    Ainsi $\boxed{\Psi \text{ induit un isomorphisme entre } \mathrm{E}_1 \text{ et } \mathbb{K}^d}$

30. De la question précédente, on montre que Ψ est surjective de E vers $\mathbb{K}^d$ et que $\ker(\Psi) \bigcap \mathrm{E}_1 = \{0\}$.
    Ainsi $\dim(\mathrm{E}_1) = d = \mathrm{rg}(\Psi)$ et $\dim(\mathrm{E}) = \dim(\ker(\Psi)) + \mathrm{rg}(\Psi) = \dim(\ker(\Psi)) + \dim(\mathrm{E}_1)$
    donc $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{Ker}(\Psi)$
    On a $\mathrm{Ker}\,\Psi = \bigcap_{i=0}^{d-1} \mathrm{F}_i$ (les F_i sont introduits en 28) on a donc $\mathrm{F} \subset \mathrm{Ker}\,\Psi$
    Soit $x \in \mathrm{Ker}(\Psi)$. Montrons que $x \in \mathrm{F}$
    Soit $i \in \mathbb{N}$. Il suffit d'établir que $\Phi(f^i(x)) = 0$
    Le théorème de la division euclidienne nous fournit Q et $\mathrm{R} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\deg(\mathrm{R}) < d$ et $\mathrm{X}^i = \mathrm{Q}\pi_f + \mathrm{R}$.
    On peut écrire $\mathrm{R} = \sum_{k=0}^{d-1} a_k \mathrm{X}^k$. On a comme en 26 et car Φ est linéaire
    $$\Phi(f^i(x)) = \Phi(0) + \Phi(\mathrm{R}(f)(x)) = 0 + \sum_{k=0}^{d-1} a_k \Phi\left(f^k(x)\right) = 0$$
    ainsi $\mathrm{F} \supset \mathrm{Ker}\,\Psi$ d'où $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}\,\Psi$
    on conclut que $\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{F}}$

31. **Préambule :** Avant de commencer la construction par récurrence, on remarque que dans ce qui précède le polynôme minimal de f est celui de ψ_1 et donc que $\forall x \in \mathrm{F}, \pi_{\psi_1}(f)(x) = 0$

    Initialisation : On prend E_1, F et ψ_1 comme ci dessus.
    On a E_1 stable par F et ψ_1 cyclique.
    On pose $\mathrm{P}_1 = \pi_f = \pi_{\psi_1}$, $\mathrm{G}_1 = \mathrm{F}$ de sorte que $\mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{G}_1 = \mathrm{E}$
    On a $\forall x \in \mathrm{G}_1,\ \mathrm{P}_1(f)(x) = 0$

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

On suppose avoir l'existence de k sous-espaces vectoriels de E, notés $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_k$ et G_k tous stables par f, tels que

— $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}_k \oplus \mathrm{G}_k$;
— pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$, l'endomorphisme ψ_k induit par f sur le sous-espace vectoriel E_i est cyclique ;
— si on note P_i le polynôme minimal de ψ_i, alors P_{i+1} divise P_i pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant k-1$
— $\forall x \in \mathrm{G}_k,\ \mathrm{P}_k(f)(x) = 0$

Si $\dim \mathrm{G}_k = 0$, on s'arrête et on pose $r = k$

Sinon, on applique 24 à 30 à l'endomorphisme induit par f sur G_k

On obtient alors E_{k+1}, G_{k+1} sous espaces stables par f et le polynôme P_{k+1} tels que

— $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}_{k+1} \oplus \mathrm{G}_{k+1}$;
— l'endomorphisme ψ_{k+1} induit par f sur le sous-espace vectoriel E_{k+1} est cyclique ;
— si on note P_{k+1} le polynôme minimal de ψ_{k+1}, alors P_{k+1} divise P_k
— $\forall x \in \mathrm{G}_{k+1},\ \mathrm{P}_{k+1}(f)(x) = 0$

On a ainsi la construction voulue au rang k.

Conclusion : Cette construction algorithmique s'arrête car à chaque étape $\dim(\mathrm{E}_k) \leqslant 1$ et donc $r \leqslant \dim(\mathrm{E})$. car $(\dim \mathrm{G}_k)_k$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{N}$ strictement décroissante.

On obtient ainsi le résultat voulu.

On en déduit qu'il existe r sous-espaces vectoriels de E, notés $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_r$, tous stables par f, tels que :

— $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}_r$;
— pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, l'endomorphisme ψ_i induit par f sur le sous-espace vectoriel E_i est cyclique ;
— si on note P_i le polynôme minimal de ψ_i, alors P_{i+1} divise P_i pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant r-1$.

III.C. Commutant d'un endomorphisme quelconque

32. Je reprends les notations de la questions précédente pour la décomposition de Frobenius de f.
Je note Λ l'application telle que pour $(g_1, \dots, g_r)\mathcal{L}(\mathrm{E}_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(\mathrm{E}_r)$, on a $\Lambda(g_1, \dots, g_r)$ défini sur E par $\Lambda(g_1, \dots, g_r)(x) = g_1(x_1) + \cdots g_r(x_r)$ où $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} x_k$ et les $x_k \in \mathrm{E}_k$
Ainsi définie, Λ est linéaire de $\mathcal{L}(\mathrm{E}_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(\mathrm{E}_r)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$
De plus on montre facilement que Λ est injective et que $\Lambda\left(\mathrm{C}(\psi_1) \times \cdots \times \mathrm{C}(\psi_r)\right) \subset \mathrm{C}(f)$
Ainsi $\dim\left(\mathrm{C}(f)\right) \geqslant \dim\left(\mathrm{C}(\psi_1) \times \cdots \times \mathrm{C}(\psi_r)\right) = \dim\left(\mathrm{C}(\psi_1)\right) + \cdots + \dim\left(\mathrm{C}(\psi_r)\right)$
or pour $i \in [\![1, r]\!]$, en notant $n_i = \dim \mathrm{E}_i$ on a $\mathrm{C}(\psi_i) = \mathrm{Vect}(\psi_i^0, \psi_i^1, \dots, \psi_i^{n_i-1})$ d'après 23 du **III.A**
Comme ψ_i est cyclique alors $(\psi_i^0, \psi_i^1, \dots, \psi_i^{n_i-1})$ est libre d'après 7
donc $\dim\left(\mathrm{C}(\psi_i)\right) = n_i = \dim\left(\mathrm{E}_i\right)$ d'où
$$\dim\left(\mathrm{C}(\psi_1)\right) + \cdots + \dim\left(\mathrm{C}(\psi_r)\right) = \dim\left(\mathrm{E}_1\right) + \cdots + \dim\left(\mathrm{E}_r\right) = \dim\left(\mathrm{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}_r\right) = \dim(\mathrm{E}) = n$$
Ainsi $\boxed{\text{la dimension de } \mathrm{C}(f) \text{ est supérieure ou égale à } n}$

33. On note $d = \deg\left(\pi_f\right)$. D'après le cours, on a $\dim\left(\mathbb{K}[f]\right) = d$
or $\mathbb{K}[f] = \mathrm{C}(f)$ et $\dim \mathrm{C}(f) \geqslant n$ donc $d \geqslant n$.
Or on a $\pi_f | \chi_f$ comme conséquence de Cayley-Hamilton ainsi $d \leqslant n$
donc $d = n$
Or en reprenant les notations précédentes, on a $\dim(\mathrm{E}_1) = d = n$
Donc $\mathrm{E}_1 = \mathrm{E}$ et $\psi_1 = f$ or ψ_1 est cyclique
ainsi $\boxed{f \text{ est cyclique}}$

IV. Endomorphismes orthocycliques

IV.A. Isométries vectorielles orthocycliques

34. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $\mathrm{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $\mathrm{R}(-\theta)$ (géométriquement en échangeant les deux vecteurs de la base orthonormée ce qui change l'orientation du plan).

Si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, alors $\mathrm{R}(\theta) = \mathrm{I}_2$.
Si $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$, alors $\mathrm{R}(\theta) = -\mathrm{I}_2$.
Si $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$, alors il existe $\theta' \in]0, \pi[$ tel que $\mathrm{R}(\theta')$ soit semblable à $\mathrm{R}(\theta')$.

D'après le cours sur la réduction des automorphismes orthogonaux, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$, p, q et $r \in \mathbb{N}$ et $\theta_1, \ldots, \theta_r \in]0, \pi[$ tels que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit diagonale par blocs de la forme : $\operatorname{diag}(\mathrm{I}_p, -\mathrm{I}_q, \mathrm{R}(\theta_1), \ldots, \mathrm{R}(\theta_r))$.
On remarque que $p + q + 2r = n = \dim(\mathrm{E})$
et $\chi_{\mathrm{R}(\theta)} = \mathrm{X}^2 - \mathrm{tr}(\mathrm{R}(\theta)) + \det(\mathrm{R}(\theta)) = \mathrm{X}^2 - 2\cos(\theta) + 1 = \left(\mathrm{X} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(\mathrm{X} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)$
on a ainsi $\chi_f = \chi_{\mathrm{I}_p} \times \chi_{(-\mathrm{I}_q)} \times \chi_{\mathrm{R}(\theta_1)} \times \cdots \times \chi_{\mathrm{R}(\theta_r)} = (\mathrm{X}-1)^p(\mathrm{X}+1)^q \prod_{i=1}^{r} \left(\mathrm{X} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_i}\right)\left(\mathrm{X} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_i}\right)$
Quitte à réordonner les vecteurs de la base, on peut supposer que $0 < \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \cdots \leqslant \theta_r < \pi$
ainsi p est la multiplicité de 1, q est la multiplicité de -1 dans χ_f et les $\theta_1, \ldots, \theta_r$ sont donnés dans l'ordre par les racines non réelles de χ_f
Ainsi comme $\chi_f = \chi_{f'}$, on pourra trouver $\mathcal{B}'$ base orthonormée telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f')$ ait la même forme diagonale par blocs.
ainsi $\boxed{\text{il existe des bases orthonormales } \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{B}' \text{ de E telles que } \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f')}$

35. $\Longrightarrow$ **:** On suppose que f est orthocyclique.
Ceci nous fournit $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_1\mathrm{X} + a_0 \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E tels que

$$\mathcal{M}\mathcal{B}(f) = \mathrm{C_Q} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} = (\mathrm{C}_1 | \cdots | \mathrm{C}_n)$$

où $\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_n$ désigne les colonnes de la matrice.
Comme $f \in \mathrm{O}(\mathrm{E})$, $\mathcal{B}$ est orthonormée, alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathrm{O}(n)$
d'où $(\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$
donc pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, on a $\mathrm{C}_i \perp \mathrm{C}_n$ et donc $0 = \langle \mathrm{C}_i, \mathrm{C}_n \rangle = -a_i$ et $1 = \langle \mathrm{C}_n, \mathrm{C}_n \rangle = a_0^2$

$$\text{ainsi } a_0 \in \{-1, 1\} \text{ et } \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{C_Q} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi d'après 3, on a $\chi_f \in \{\mathrm{X}^n - 1, \mathrm{X}^n + 1\}$

$\Longleftarrow$ **:** On suppose que $\chi_f = \mathrm{X}^n + a$ avec $a \in \{-1, 1\}$.
On note $\mathrm{Q} = \chi_f$ et on considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ une base orthonormée de E.
On considère alors l'unique endomorphisme $g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) = \mathrm{C_Q}$ fourni par le cours.
g envoie la base $\mathcal{B}$ sur la famille $\mathcal{F} = (e_2, \dots, e_n, ae_1)$.
On remarque que $\mathcal{F}$ est une famille orthonormale de E composée de n vecteurs de E or $\dim(\mathrm{E}) = n$ donc g est un endomorphisme de E qui envoie la base orthonormée $\mathcal{B}$ sur la base orthonormée $\mathcal{F}$
Ainsi $g \in \mathrm{O(E)}$ et $\chi_g = \chi_{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g)} = \chi_{\mathrm{C_Q}} = \mathrm{Q} = \chi_f$ et $f \in \mathrm{O(E)}$.

Alors la question 34 nous fournit les deux bases orthonormées respectivement $\mathcal{B}_f$ et $\mathcal{B}_g$ pour lesquelles respectivement f et g ont la même matrice notée M. Ainsi il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{O}(n)$ matrice de changement de bases orthonormales telle que

$$\mathrm{M} = \mathrm{P}^{-1}\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g)\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{C_Q}\mathrm{P}$$

Ainsi la matrice $\mathrm{C_Q} = \mathrm{PMP}^{-1} = \mathrm{P}\mathcal{M}_{\mathcal{B}_f}(f)\mathrm{P}^{-1}$ représente f dans une base orthonormée.
Ce qui prouve que f est orthocyclique.

On en déduit que : $\boxed{f \text{ est orthocyclique si et seulement si } \chi_f = \mathrm{X}^n - 1 \text{ ou } \chi_f = \mathrm{X}^n + 1}$

IV.B. Endomorphismes nilpotents orthocycliques

36. Comme f est nilpotent, le cours nous fournit une base $\mathcal{B}_s = (e_1^s, \dots, e_n^s)$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_s}(f)$ soit triangulaire supérieure.

On applique le procédé de Gram-Schmidt à $\mathcal{B}_s$ pour obtenir une base orthonormale $\mathcal{B}_o = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ et en notant la matrice de passage P de $\mathcal{B}_s$ à $\mathcal{B}_o$ est triangulaire supérieure ainsi que P^{-1}.

Comme le sous-espace des matrices triangulaires supérieures est stable par produit ;
alors la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_o}(f) = \mathrm{P}^{-1}\mathcal{M}_{\mathcal{B}_s}(f)\mathrm{P}$ est triangulaire supérieure.
Alors en notant $\mathcal{B}_i = (\epsilon_n, \dots, \epsilon_2, \epsilon_1)$, on a $\mathcal{B}_i$ base orthonormale de E et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_i}(f)$ triangulaire inférieure
ainsi $\boxed{\text{il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de } f \text{ est triangulaire inférieure}}$

37. $\Longleftarrow$ **:** On suppose que f est de rang $n-1$ et que $\forall x, y \in (\ker f)^{\perp},\ (f(x)|f(y)) = (x|y)$.
La question précédente nous fournit une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ tel que $\mathrm{A} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ soit triangulaire inférieure.
Je note $\mathrm{A} = (\mathrm{C}_1 | \dots | \mathrm{C}_n)$ en colonnes.
Comme f est nilpotente, alors $\chi_f = \mathrm{X}^n$ d'après le cours
donc la matrice est triangulaire strictement inférieure (diagonale nulle)
ainsi $e_n \in \mathrm{Ker}\, f \setminus \{0\}$ et comme $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = n - \mathrm{rg}(f) = 1$,
on a $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(e_n)$ et $\mathrm{Ker}(f)^{\perp} = \{e_n\}^{\perp} = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$ car $\mathcal{B}$ est orthonormée
Ainsi pour tout $i, j \in [\![1, n-1]\!]$, par calcul dans une base orthonormée on a :

$$\langle \mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j \rangle = (f(e_i)|f(e_j)) = (e_i|e_j) = \delta_{i,j} \text{ (symbole de Kronecker)}$$

donc si $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$, on a $\langle \mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j \rangle = 0$ et $\langle \mathrm{C}_i, \mathrm{C}_i \rangle = \langle \mathrm{C}_j, \mathrm{C}_j \rangle = 1$

On a donc $\mathrm{C}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{C}_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$ avec $a_{n-1} \in \{-1, 1\}$ car $a_{n-1}^2 = \langle \mathrm{C}_{n-1}, \mathrm{C}_{n-1} \rangle = 1$

On trouve ensuite $C_{n-2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ a_{n-2} \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $a_{n-1} \in \{-1, 1\}$ car $\langle C_{n-2}, C_{n-1} \rangle = 0$ et $\langle C_{n-2}, C_{n-2} \rangle = 1$

En procédant de même, on obtient $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$ où les $a_i \in \{-1, 1\}$

La base $\mathcal{B}' = (e_1, a_1 e_2, a_1 a_2 e_3, \dots, \prod_{i=0}^{n-2} a_i e_{n-1}, \prod_{i=0}^{n-1} a_i e_n)$ est orthonormée et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = C_{X^n}$.

Ainsi f est orthocyclique.

$\Longrightarrow$ **:** On suppose que f est orthocyclique.

Comme f est cyclique et nilpotent , on a $\pi_f = \chi_f = X^n$ d'après 12

Commme f est orthocyclique,

cela nous fournit une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = C_Q$.

Comme $X^n = \chi_f = \chi_{C_Q} = Q$, on a $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = C_{X^n}$.

donc $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(C_{X^n}) = n - 1$, $\mathrm{Vect}(e_n) = \mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) = (\mathrm{Ker}\, f)^{\perp}$

et on vérifie facilement que $\forall x, y \in (\ker f)^{\perp},\ (f(x)|f(y)) = (x|y)$ par calcul dans la base orthonormée $\mathcal{B}$