Correction

d'après INA 1998

Préliminaire :

$D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\forall 1 \le i, j \le n, \lambda_i = \lambda_j \Rightarrow i \ne j$. $M = (m_{i,j})$.
On a $MD = (\lambda_j m_{i,j})$ et $DM = (\lambda_i m_{i,j})$.
Si $MD = DM$ alors $\forall 1 \le i, j \le n, \lambda_j m_{i,j} = \lambda_i m_{i,j}$ d'où $\forall 1 \le i \ne j \le n, m_{i,j} = 0$ et ainsi M apparaît comme étant diagonale.

Partie I

1. ${}^t(AP) = {}^t(DP)$ donne ${}^tP\,{}^tA = {}^tD\,{}^tP$ puis ${}^tPA = D\,{}^tP$ car A et D sont des matrices symétriques.

2. ${}^tPPD = {}^tPAP = D\,{}^tPP$ donc ${}^tPP$ commute avec D et par suite ${}^tPP$ est diagonale.

3.a $P = (p_{i,j}), {}^tP = (p'_{j,i})$ avec $p'_{j,i} = p_{i,j}$.

Par produit matriciel : $\delta_k = \sum_{i=1}^{n} p'_{k,i} p_{i,k} = \sum_{i=1}^{n} p_{i,k}^2$.

3.b Si aucune colonne de P n'est nulle alors $\forall 1 \le k \le n, \delta_k \ne 0$.
Par suite Δ est inversible.
Comme ${}^tPP = \Delta$ on a $(\det P)^2 = \det \Delta \ne 0$ et donc P inversible.
Comme $D = P^{-1}AP$ avec A inversible, on a aussi D inversible.

4.a Comme ${}^tPP = \Delta$ on a $P^{-1} = \Delta^{-1}{}^tP$. De plus $A = PDP^{-1}$ donc
$A^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = PD^{-1}\Delta^{-1}\,{}^tP$.

4.b $D^{-1} = \text{diag}(1/\lambda_1, \ldots, 1/\lambda_n)$, $\Delta^{-1} = \text{diag}(1/\delta_1, \ldots, 1/\delta_n)$ donc
$D^{-1}\Delta^{-1} = \text{diag}(1/\lambda_1\delta_1, \ldots, 1/\lambda_n\delta_n)$.

$PD^{-1}\Delta^{-1} = (q_{i,j})$ avec $q_{i,j} = \dfrac{p_{i,j}}{\lambda_j \delta_j}$ et

$A^{-1} = PD^{-1}\Delta^{-1}\,{}^tP = (b_{i,j})$ avec $b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} q_{i,k} p'_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{p_{i,k} p_{j,k}}{\lambda_k \delta_k}$.

Partie II

1.a En développant selon la première colonne :

$$D_n = 2D_{n-1} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

puis en développant selon la première ligne :
$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$.

1.b (D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2
Sachant $D_1 = 2$ et $D_2 = 3$ on obtient $D_n = n + 1$.

1.c oui

2.a développer les sinus.

2.b Posons $Y_k = AX_k = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Pour tout $2 \le i \le n-1$: $y_i = -\sin\frac{(i-1)k\pi}{n+1} + 2\sin\frac{ik\pi}{n+1} - \sin\frac{(i+1)k\pi}{n+1}$

et de plus cette formule vaut aussi pour $i=1$ et $i=n$.

Pour tout $1 \le i \le n$: $y_i = (2-2\cos\frac{k\pi}{n+1})\sin\frac{ik\pi}{n+1}$

donc $Y_k = AX_k = \lambda_k X_k$ avec $\lambda_k = 2 - 2\cos\frac{k\pi}{n+1}$.

2.c AP est la matrice de colonnes $\lambda_1 X_1, \ldots, \lambda_n X_n$.
Pour $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, PD a pour colonnes $\lambda_1 X_1, \ldots, \lambda_n X_n$.
Donc $AP = DP$.
De plus les coefficients diagonaux de D sont deux à deux distincts puisque la fonction cosinus est injective sur $[0, \pi]$.

3.a $p_{i,j} = \sin\frac{ij\pi}{n+1}$.

3.b $\sum_{p=1}^{n} \cos 2px = \text{Re}\left(\sum_{p=1}^{n} e^{2ipx}\right) = \text{Re}\left(e^{2ix}\frac{1-e^{2inx}}{1-e^{2ix}}\right) = \text{Re}\left(e^{i(n+1)x}\frac{\sin nx}{\sin x}\right) = \frac{\sin nx}{\sin x}\cos(n+1)x$.

$S_n(x) = \sum_{p=1}^{n} \sin^2 px = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}(1-\cos 2px) = \frac{n}{2} - \frac{\sin nx}{2\sin x}\cos(n+1)x$.

3.c $\delta_k = \sum_{i=1}^{n} p_{i,k}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sin^2\frac{ik\pi}{n+1} = \frac{n}{2} - (-1)^k \frac{\sin\frac{nk\pi}{n+1}}{2\sin\frac{k\pi}{n+1}} = \frac{n+1}{2}$

car $\sin\frac{nk\pi}{n+1} = \sin\left(k\pi - \frac{k\pi}{n+1}\right) = (-1)^{k-1}\sin\frac{k\pi}{n+1}$.

4. Le coefficient voulu est $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\frac{ik\pi}{n+1}\sin\frac{jk\pi}{n+1}}{(2-2\cos\frac{k\pi}{n+1})\frac{n+1}{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\frac{ik\pi}{n+1}\sin\frac{jk\pi}{n+1}}{2(n+1)\sin^2\frac{k\pi}{2(n+1)}}$.