

CORRIGE

SECOND PROBLEME :

PARTIE I :

1) On remarque que ${}^tA = A$ donc ${}^tA.A = A^2 = A.{}^tA$ donc A vérifie la relation (1)

De même on remarque ${}^tC = -C$ donc ${}^tC.C = -C^2 = C.{}^tC$ donc C vérifie la relation (1)

$$2) A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

On en déduit que selon la parité de n on a $A^n = A$ ou $A^n = I$. Dans les deux cas ces matrices vérifient la relation (1)

3) Pour montrer que A est inversible il suffit de prouver que son déterminant est non nul :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \text{ ou encore puisque } A^2 = I, A \text{ est inversible d'inverse lui-même.}$$

4) Par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base on a : $u(\vec{i}) = \vec{j}$ et $u(\vec{j}) = \vec{i}$

u est donc bien une symétrie car $u \circ u(\vec{i}) = \vec{i}$ et $u \circ u(\vec{j}) = \vec{j}$ donc $u \circ u = id_{\mathbb{R}^2}$.

ensemble des vecteurs invariants : $V_y^{(x)}$ est invariant par u $\Leftrightarrow AV = V \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow V = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \Leftrightarrow V \in \mathbb{R}(\frac{1}{1})$

5) U vérifie la relation (1) car comme pour la matrice A elle est symétrique.

Montrons : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U^n = 2^{n-1}U$ par récurrence :

Pour n=1 le résultat donne $U = 2^0.U$ donc est vrai

Supposons que pour un entier n on a $U^n = 2^{n-1}U$ et montrons la relation au rang n+1 : $U^{n+1} = U.U^n = 2^{n-1}.U^2$ par hypothèse de récurrence; Or $U^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2U$. D'où $U^{n+1} = 2^{n-1}.2.U = 2^n.U$

Les puissances U^n , vérifient donc(1) puisque ce sont les mêmes que U à une constante multiplicative près.

$$6) A + C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ donc } (A + C).{}^t(A + C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ et } {}^t(A + C).(A + C) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cela prouve que A+C ne commute pas avec sa transposée donc on a : $A \in E$, $C \in E$ et $A + C \notin E$. Cela contredit la stabilité de E par somme donc la structure d'espace vectoriel.

$$7) {}^tMM = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + c^2 & ab + dc \\ ab + dc & b^2 + d^2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{De même on obtient : } M^tM = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Donc } M \in E \Leftrightarrow \begin{cases} ac + bd = ab + dc \\ a^2 + b^2 = a^2 + c^2 \\ b^2 + d^2 = c^2 + d^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ ac + cd = ac + dc \end{cases} \text{ ou bien } \begin{cases} b = -c \\ ac - cd = -ac + dc \end{cases} \Leftrightarrow b=c \text{ ou bien } \begin{cases} b = -c \\ d = -a \end{cases} \Leftrightarrow M = \begin{bmatrix} a & c \\ c & d \end{bmatrix} \text{ ou bien } M = \begin{bmatrix} a & -c \\ c & a \end{bmatrix}$$

$$8) \text{ Donc } M \in Vect(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}) \text{ ou bien } M \in Vect(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})$$

E est donc bien la réunion de deux espaces vectoriels

$$9) \text{ Calculons } U.C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Montrons qu'alors cette matrice n'est pas dans E_2 car ne commute pas avec sa transposée :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

On n'a donc pas la propriété proposée puisque U et C en donnent un contre-exemple.

PARTIE II :

10) Par définition, la matrice S est : $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$11) S^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S \cdot {}^t S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } {}^t S \cdot S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ donc } S \in E_3$$

$$\text{De même : } S^2 \cdot {}^t(S^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } {}^t(S^2) \cdot S^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ donc } S^2 \in E_3$$

$$12) {}^t R \cdot R = (aI_3 + b^t S + c^t(S^2)) \cdot (aI_3 + bS + cS^2) = (a^2 + b^2 + c^2)I_3 + a.b(S + {}^t S) + a.c({}^t(S^2) + S^2) + b.c(S \cdot {}^t(S^2) + S^2 \cdot {}^t S) = (a^2 + b^2 + c^2)I_3 + a.b(S + {}^t S) + a.c({}^t(S^2) + S^2) + b.c(S + {}^t S)$$

$$\text{et } R \cdot {}^t R = (aI_3 + bS + cS^2) \cdot (aI_3 + b^t S + c^t(S^2)) = (a^2 + b^2 + c^2)I_3 + a.b(S + {}^t S) + a.c({}^t(S^2) + S^2) + b.c(S \cdot {}^t(S^2) + S^2 \cdot {}^t S) = {}^t R \cdot R \text{ donc } R \in E_3$$

13) Notons $F = Vect(I_3, S, S^2) = \{aI_3 + bS + cS^2, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$. D'après la question 12, toute matrice de F commute avec sa transposée, donc $F \subset E_3$.

De plus : $aI_3 + bS + cS^2 = 0 \iff \begin{bmatrix} a & b & c \\ -c & a & b \\ -b & -c & a \end{bmatrix} = 0 \iff a = b = c = 0$ donc la famille (I_3, S, S^2) est libre et F est bien un espace vectoriel de dimension 3 inclus dans E_3

14) Soient (a, b, c) et (d, e, f) deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et soit $R = aI_3 + bS + cS^2$ et $T = dI_3 + eS + fS^2$.

$R \cdot T = adI_3 + (ae + bd)S + (af + be + cd)S^2 + (bf + ce)S^3 + cfS^4 = adI_3 + (ae + bd)S + (af + be + cd)S^2 - (bf + ce)I_3 - cfS$ car on prouve aisément que $S^3 = -I_3$. Donc $R \cdot T \in Vect(I_3, S, S^2) = F$ et F est bien stable par multiplication.

PARTIE III :

$$15) \text{ Calculons : } {}^t B \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & a+1 & 0 & 0 \\ a+1 & a^2+1 & a-1 & a+1 \\ 0 & a-1 & 2 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot {}^t B = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+a^2 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ a+1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ d'où } B \in E_4 \iff a = -1$$

16. On effectue des opérations sur les colonnes de B, ce qui laisse stable son rang :

$$rg(B) = rg \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = rg \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = rg \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ d'où } rg(B) = 3$$

Les deuxième et troisième colonnes de B étant opposées, le vecteur $\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ est dans $\ker(u)$ donc forme une base de $\ker(u)$ puisque d'après le théorème du rang, $\dim \ker(u)=1$

les trois vecteurs colonnes non nuls de la matrice obtenue ci-dessus forment alors une base de $\text{Im}(u)$, soit : $(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4, -\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4, \vec{e}_4)$

17. On utilise une notation matricielle pour ce calcul :
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

On remarque alors que $u(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4) = -2(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4)$.

18.
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

On constate que les images sont égales aux doubles des vecteurs

19) Le premier vecteur est dans $\ker(u)$, pour les autres, leurs images sont des multiples d'eux-mêmes donc on obtient :

$$Mat_C(u) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \text{ Notons-là } \Delta.$$

La formule de changement de base pour un endomorphisme nous donne alors la relation $B = P\Delta P^{-1}$ avec

$$P = Pass(B, C) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

20) Par récurrence sur n :

* le résultat pour n=1 résulte de la question 19)

* supposons-le pour un entier $n \geq 1$

* $B^{n+1} = B.B^n = P\Delta P^{-1}.P\Delta^n P^{-1} = P\Delta.\Delta^n P^{-1} = P\Delta^{n+1} P^{-1}$ d'où le résultat à l'ordre n+1.

Δ étant diagonale, on calcule aisément ses puissances ; Pour n=2p, on constate alors :

$$\Delta^{2p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{2p} \end{bmatrix} = 2^{2p-2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 2^{2p-2} \cdot \Delta^2.$$

$$\text{Donc } B^{2p} = P(2^{2p-2} \cdot \Delta^2)P^{-1} = 2^{2p-2} P\Delta^2 P^{-1} = 2^{2p-2} B^2$$

$$\text{On a alors } \Delta^{2p+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2p+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2p+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{2p+1} \end{bmatrix} = 2^{2p} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2^{2p} \Delta$$

d'où on obtient de même $B^{2p+1} = 2^{2p} B$.

FIN

